目　　录

第一章　引　　言

1.1　粒子和相互作用

"一尺之棰，日取其半，万世不竭"

中国古代的一位博学家[1]在这一名言中设计了一个假想实验。对于物理学家们为探索物质的终极结构在实验室里真正做的实验而言，这一假想实验是一个最恰当的比喻。

从现代意义上的物理学诞生以来的三个世纪内，这种"日取其半"的实验我们只做了大约六十天（达到了10^{-16}厘米）。在三十天左右时（约10^{-8}厘米），我们遇到了物质的第一个粒状结构，这就是原子。起初看来，原子似乎是不可分的。但众所周知，后来证明它可以进一步分成电子和原子核，原子核本身又可分裂成核子。现在，我们正处在核子的组分——夸克有可能得到肯定的证实的阶段。种种迹象表明，再分割过程还会继续下去。到目前为止，这位古代博学家看来仍然是正确的。

从实验的观点看，粒子，不管是弹子球、光子还是Λ超子，都是可探测的一份能量和动量。在我们的认识的每个阶段，总把某些粒子指定为"基本粒子"。这指的是，在我们的理论中它们是一些最基本的相互作用的单元。随着实验知识的扩充，我们常常不得不修正我们的看法。作这些修正的必要性取决于我们在这些理论上所加的严格要求，即原则上，它们必须能定量地预言出所有可能的实验结果。

幸运的是，在任何阶段，我们总是能够把某些粒子暂时看做

基本粒子而不危及我们改变想法的权力。其原因在于，按照量子力学，把那些激发能远高于所研究能区的量子态忽略，是一个很好的近似。例如，当能量远低于 1MeV 时，一个原子核可以唯象地当做一个质点来处理。自从原子物理的时代开始以来，我们已经发现了很多层次的亚结构。但值得注意的是，从那个时代知道的一些动力学原理（后来被综合成相对论定域量子场论[2]），至今仍然在起作用。

实验上已观测到的粒子之间的相互作用，按其显著不同的强度分成四类：引力相互作用、弱相互作用、电磁相互作用和强相互作用。它们的简略回顾列在了表 1.1 中。

按照流行的理论观点，弱相互作用和电磁相互作用是一种统一的相互作用的低能表现形式，而强相互作用起源于一种潜藏的称为“颜色”的荷，它被永远禁闭在核子以及其它强相互作用粒子内部的夸克所携带。人们假定，所有这三种相互作用都与电动力学中熟知的情况类似，以最小耦合方式，通过交换矢量介子而传递。我们甚至还能推测到，所有这三种相互作用实际上都是单一的一种“大统一”的相互作用的低能表现形式，但这种统一只有当能量高达 10^{17}GeV 以上时才能直接显示出来。不幸的是，由于完全缺乏实验信息，人们还讲不出任何关于引力相互作用微观方面的可靠的知识。在把所有的相互作用综合在一起的终极统一的理论中，引力可能是重要的，但是本书不打算对它进行什么讨论。

把粒子从理论上分类的基础是假定在彭加勒（Poincaré）变换下，即洛仑兹（Lorentz）变换和时空平移下，物理定律是不变的。一个粒子，不管它是基本的还是组合的，都被定义成量子场的一个状态。在彭加勒群元素的作用下，这个状态按照确定的不可约表示变换。这意味着，粒子有确定的质量和自旋，而且与每个粒子相联系都有一个相同质量、相同自旋的反粒子[3]。定域

表1.1　四种类型的相互作用

相互作用	引　力	弱	电磁	强
表现形式	天体力学	β放射性	日常世界	结合原子核
量子观点	$\sqrt{\gamma m_1}$ 引力子 $\sqrt{\gamma m_2}$ 质量1　质量2	e　p　ν　G　n	q_1 光子 q_2 电荷1　电荷2	$g_{有效}$ (?) $g_{有效}$ 核子
静　势	$-\frac{\gamma m_1 m_2}{r}$ r = 源之间的距离	—	$\frac{q_1 q_2}{4\pi r}$	$-g_{有效}\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}$ $\frac{\hbar}{\mu c}\sim 10^{-13}$厘米
耦合强度	$\frac{\gamma m_p^2}{\hbar c}=5.76\times10^{-36}$ m_p = 质子质量	$Gm_p^2=1.01\times10^{-5}$	$\frac{e^2}{4\pi\hbar c}=\frac{1}{137.036}$ e = 电子电荷	$\frac{g^2}{4\pi\hbar c}\cong 10$

场论中微观因果性的假设更进一步包含自旋和统计之间的一种联系：有整数自旋的粒子是玻色子，有半整数自旋的粒子是费米子[4]。人们还要求粒子间的相互作用在彭加勒群下不变，这给可能的定域量子场论加上了一些非平庸条件[5]。

除了彭加勒不变性这种时空对称性外，还有一些内部对称性，它们和粒子态不依赖于时空的变换有关。相互作用对内部对称群的不变性给出标志粒子态的另外一些量子数，象电荷、重子数和同位旋等。

图 1.1 给出了部分已知粒子的一份清单，按照质量、自旋、内部量子数以及它们参加的相互作用类型把它们分了类。

"强子"是指那些参加强相互作用的玻色子和费米子，"轻子"是指不参加强相互作用的费米子[注a]。强子中，"介子"是重子数为零的玻色子，而"重子"是重子数不为零的费米子[注b]。所有这些粒子中（除了图 1.1 中没有画出的光子）只有电子和核子与我们的日常经验有关。人们或许还可以更进一步，把作为生成太阳能的重要催化剂的中微子包括进来，而 μ 子则是上帝的恩赐[注c]。所有别的粒子最初都是在高能加速器中产生的。

有两个鲜明的特点应该提一提。其一，所有的轻子似乎都是类点粒子，它们的"半径"上限的最新实验值是 10^{-16} 厘米[6]。对于 τ 子，这一点特别值得注意，因为它比质子还要重一倍左右。其二是强子态的数量的急剧增长。正如哈格栋(Hagedorn)[7]指出的，强子态密度对质量的关系图（如图 1.2 所示）暗示着一

[注a] 迄今观测到的所有玻色子除光子外都参加强相互作用。历史上，轻子的命名是因为它们是轻的，但随着 τ 子的发现，这一点不再正确了。

[注b] 所有的重子都是费米子，而所有的介子都是玻色子，其所以如此的原因在于相对论场论中重子数守恒，即拉氏量中费米场必须以双线性形式出现，而玻色场可以线性地出现。

[注c] 拉比(I. I. Rabi)曾问道："谁安排了这一切？"

轻子
强子
重子
介子
自旋 $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$
0
1
质量 (GeV/c^2)
0
1
2
3
4
τ
μ
电子
中微子
日常世界
核子
Λ
Σ
[Ξ]
Δ
Y*
[Ξ]*
Ω
⑧
⑩
π
K
η
K*
ω
ρ
J/ψ
ψ′
ψ″
ψ‴
重夸克世界

图 1.1　粒子质量谱

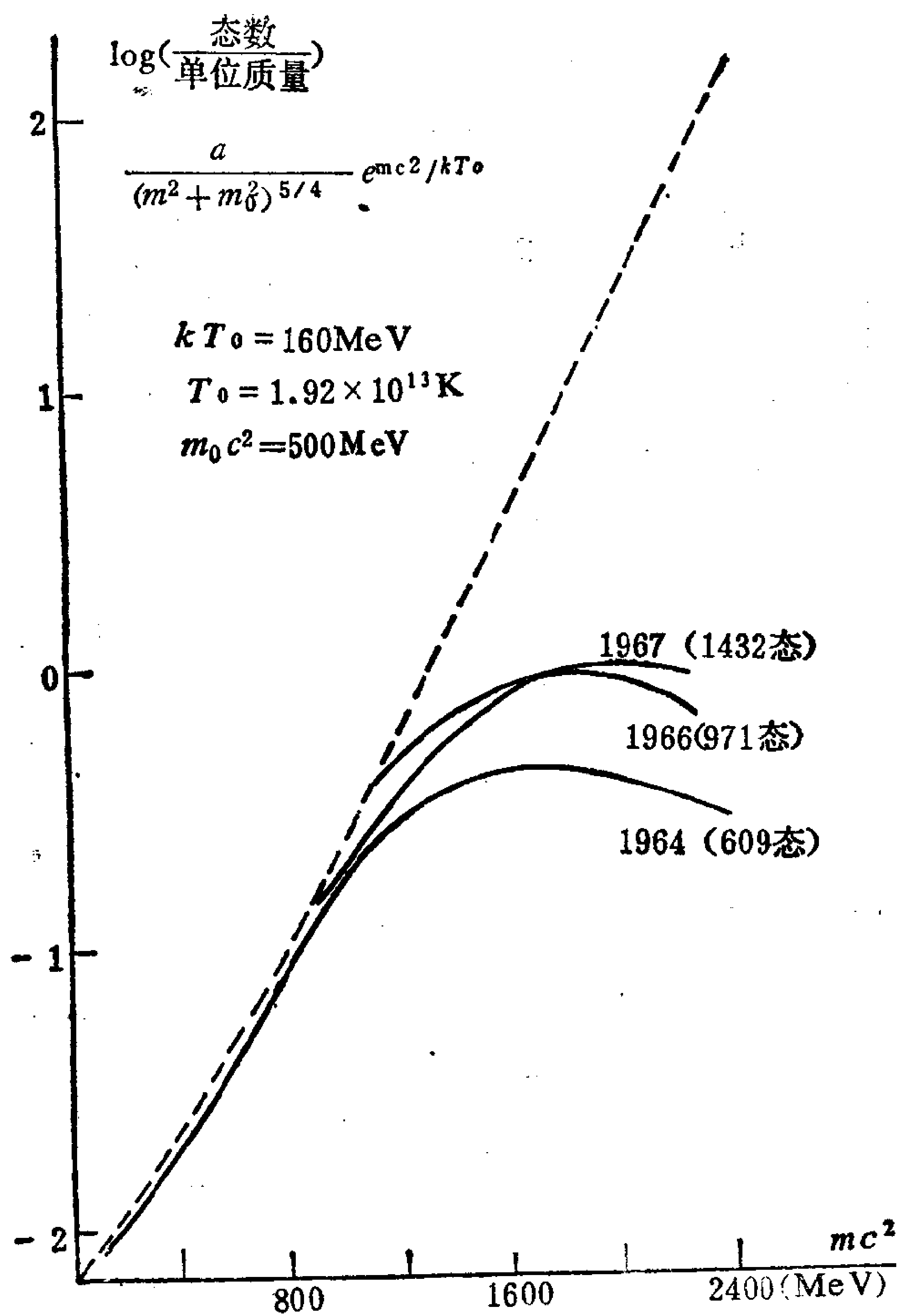


图 1.2　作为质量函数的强子状态数

种指数增长规律.

假如这一倾向继续发展到越来越大的质量，就会存在一个大约为 160MeV（2×10^{13}K）的“终极温度”，没有任何一个体系

可以加热到这个温度以上[8]. 假如这一增长比指数还快的话，统计力学的配分函数就会不存在了。于是，强子态密度似乎正在以与热力学相符的最大速率增长。

既使我们从实验上还没有探测到质子的有限半径（我们已经测得，这个值约为 10^{-13} 厘米）[9]，强子的绝对数量也会使把它们都看做“基本粒子”的假定成为十分荒谬的. 理解强子内部结构的关键是它们的多重态结构（例如图 1.1 中的 $\underline{8}$ 和 $\underline{10}$），这些多重态都可以等同于内部对称群 $SU(3)$ 的不可约表示。这一点是一个开端，它导致把夸克看做是强子组分的观念，即认为夸克组成 $SU(3)$ 的基础表示。关于夸克以及它们的相互作用的证据的详细讨论，将在第二章中给出。

1.2 相互作用的规范理论

按照流行观点，所有的相互作用都可以从一个与电磁学中的“规范原理”类似的原理推导出来. 我们回顾一下电磁场 A^μ 与带电的物质场 Ψ 的耦合，它可以依照下列规则推导出来：把物质场拉氏量中的 $\partial^\mu\Psi$ 用协变微商 $(\partial^\mu+ieA^\mu)\Psi$ 代替。其中 e 是 Ψ 的电荷. 在“打开”耦合之前（也即取 $e=0$ 时）物质场的拉氏量应在 Ψ 的常数相位变换下保持不变. 这种变换称为“整体规范变换”. 上述规则的实施结果把这一对称性扩大为“定域规范不变性”，这是一种在 Ψ 的依赖于时空的任意的相位变换（伴随着 A^μ 的相应的规范变换）[注 d]下的不变性。原来的整体规范不变性意味着存在一个守恒的物质流 j^μ，而实施上述规则导

[注 d] 韦尔(H. Weyl)在把电磁学与引力统一在一个几何理论的有趣但不成功的尝试中第一次引进“规范变换”的术语. 在这个理论中，他把弯曲时空中一个矢量的方向的不可积性扩充到在一个称为“规范空间”的扩充的空间中矢量的长度(规范)的不可积性. 见 Ann. d. physik, 59(1919)101.

致形式为 $ej^{\mu}A_{\mu}$ 的相互作用，它与麦克斯韦理论是一致的。在正则场论的通常假定下，这一规则是唯一的，常称之为“规范原理”。

我们可以把规范原理重新表述如下。考虑一个原来在整体 $U(1)$ 规范变换群下不变的物质体系。把这一对称性“规范化”，即把它扩大成定域 $U(1)$ 规范不变性。这意味着，与每一个时空点相联系都有一个独立的 $U(1)$ 规范群。为了做到这一点，必须引入一个矢量规范场，使物质场的流与它相耦合。耦合常数是电荷，它是 $U(1)$ 群的生成元。只有当原来的整体对称性是一种严格的对称性时，这种“规范化”才是可能的。

我们将用到由杨和密尔斯（Yang and Mills）[10]提出的广义规范原理，它适用于多分量的物质场。代替 $U(1)$，这时的规范群是一个更大的变换群，它把这个物质场的不同的分量混合在一起。与之相应，有不止一个规范场即杨-密尔斯场，其个数等于规范群生成元的数目。与弱相互作用、电磁相互作用和强相互作用相关的群是 $SU(2)\times U(1)\times SU(3)$。为了确定这个群，我们必须先来描述物质场。

弱相互作用的一个熟知的特征是由于 V–A 耦合[11]而在最大程度上破坏宇称守恒[12]。这就是说，改变电荷的弱作用只有轻子的左手分量参加耦合。右手分量起着相当被动的作用，它们只提供质量。类似地，假定夸克有着与轻子同样的弱耦合，可以解释强子的弱作用。于是，对于弱作用，基本的成分是一些有确定手征性（Chirality）[注 e]的态，它们有零质量（一个有限质量的本征态是左手态和右手态以相等权重叠加）。格拉肖(Glashow)[13]最早提出了一种以规范群 $SU(2)\times U(1)$ 为基础的弱电相互作用的统一理论，它把不同的无质量的手征态混合在一起。

[注 e] 手征性定义为 γ_5 的本征值，$\gamma_5=1$ 相应于右手，$\gamma_5=-1$ 相应于左手。

然而，事实上物理粒子都有有限的质量，这似乎使这一对称性遭到了破坏。温伯格[14]和萨拉姆[15]靠了一种“对称性自发破缺”的观念挽救了这种似乎走投无路的困难局面。在现在称为温伯格-萨拉姆标准模型中，上述思想是通过引入“希格斯场”（Higgs fields）来实现的，尽管这些场可能只是一些唯象的参量，在未来的理论中会被某种更基本的客体所代替。说真的，目前我们对于质量从哪里产生的，并没有深刻的了解。

被“规范化”了的这些对称性都是与有着确定手征性、无质量的夸克与轻子之间的变换有关的。它们各自至少有六种“味”（flavor）。（第六种味夸克的存在实验上还没有确认。）轻子的味是（e，ν），（μ，ν'）和（τ，ν''），其中所有的ν都代表无质量的左手中微子。夸克的味与轻子的味一一对应，它们是：（u，d），（s，c）和（t，b）。这些圆括号把粒子分成了三个家族。单就弱作用而言，这些家族象是一些不可分辨的复制品[注f]。此外，夸克的每一种味还有三种（且只有三种）“色”（color），但轻子是无色的。于是，基本粒子是

$$\text{夸克：}q_{fn}\begin{cases}(f=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)\ \ \text{（味指标）}\\(n=1,\ 2,\ 3)\ \ \text{（色指标）}\end{cases}$$

$$\text{轻子：}l_f\quad(f=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)\ \ \text{（味指标）}$$

当然，例如q_{fn}既表示了$(q_R)_{fn}$，也表示了$(q_L)_{fn}$，它们分别是右手和左手分量，每一种都要看做是独立的粒子。

表1.2更清楚地列出了所有的夸克和轻子，并且假定它们有下列内部对称性：

a）**色SU(3)**：对于色指标，每种味的三个夸克构成色$SU(3)$群的三维表示。轻子都是色单态[注g]。

[注f] 拉比的问题（第4页）可以被推广，但仍然没有答案。

[注g] 这意味着这个理论在所讨论的群之下是不变的，所有的粒子在这个群下都按规定的味表示变换。

表 1.2 夸克和轻子的内部对称性

家 族	味 f	夸克 q_{fn} 色：$n=1,2,3$	轻子l_f	
Ⅰ	1	u_1 u_2 u_3	ν	↕ $SU(2)$
	2	d_1 d_2 d_3	e	
Ⅱ	3	c_1 c_2 c_3	ν'	↕ $SU(2)$
	4	s_1 s_2 s_3	μ	
Ⅲ	5	t_1 t_2 t_3	ν''	↕ $SU(2)$
	6	b_1 b_2 b_3	τ	

←——→ $SU(3)$

b) 弱同位旋 $SU(2)$：每个家族里，下面的和上面的两个粒子的左手分量（例如 ν_L 和 e_L）构成"弱同位旋群" $SU(2)$ 的二维表示。所有的右手粒子都是 $SU(2)$ 的单态。

c) 弱超荷 $U(1)$：存在一种称为"弱超荷"（weak hypercharge）的 $U(1)$ 对称性，它是与每种粒子同时做相位变化相联系的。相对相位由一定的"弱超荷"规定而固定下来。

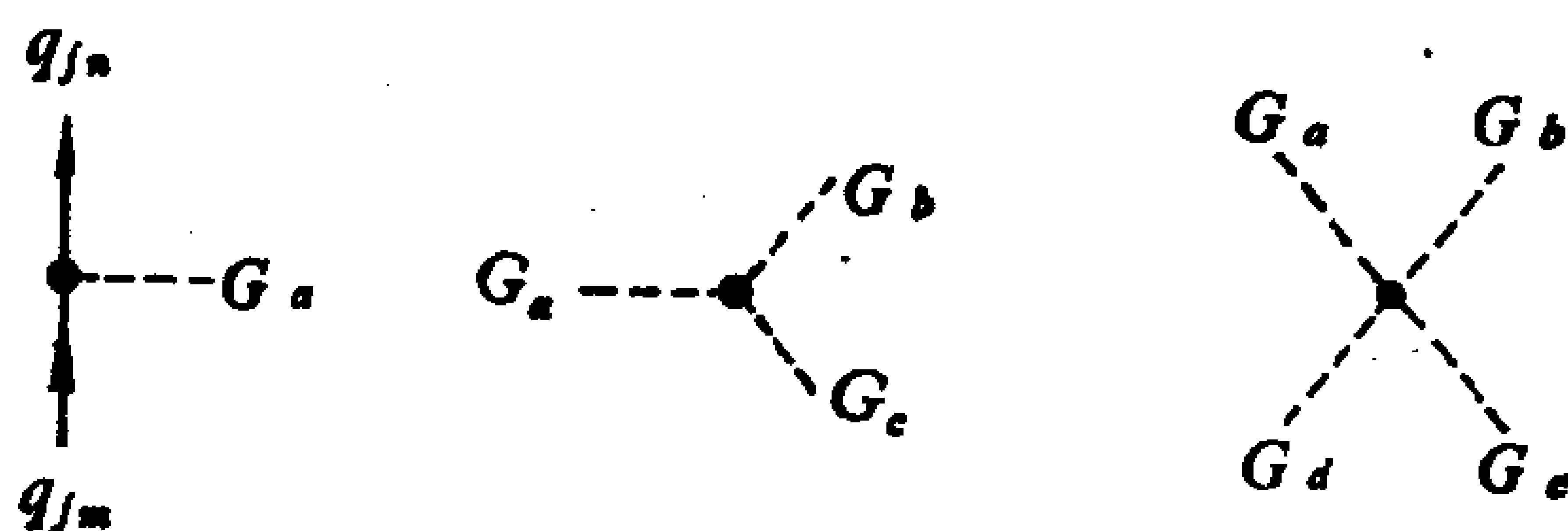
那时，规范群就是 $SU(2)\times U(1)\times SU(3)$，它是上面定义的三个相互对易的群的直乘。把这个群"规范化"需要引入12个矢量规范场，每个群的生成元有一个，如表 1.3 所示。最后得到的相互作用可以用图 1.3 所示的费曼顶点图来示意地描写。

这些规范场一般都有自相互作用，其原因在于由于群的非阿贝尔(non-Abelian)性质，它们与光子不同，通常都带有"荷"。值得注意的是，这个理论中还有另外一些严格的对称性，例如重子数和轻子数，它们是不能被"规范化"的。

表 1.3 规范场

规 范 群	生成元的个数	规 范 场
色 $SU(3)$	8	$G_a^\mu(a=1,\cdots,8)$（胶子）
弱同位旋$SU(2)$	3	$W_i^\mu(i=1,2,3)$
弱超荷$U(1)$	1	W_0^μ

强相互作用顶点

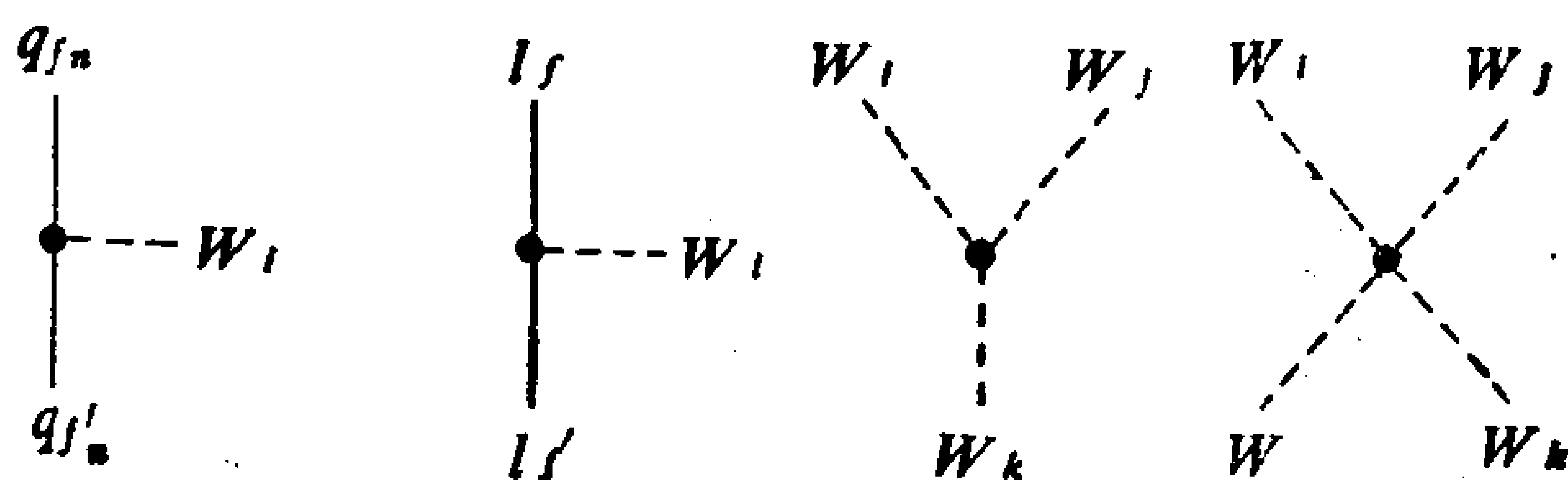


$n, m=1, 2, 3$（色指标）

$a, b, c, d=1, \cdots, 8$（胶子指标）

注：味f不改变

弱电相互作用顶点



$f, f'=1, \cdots, 6$（味指标）

$i=0, 1, 2, 3$（矢量玻色子指标）

注：色n不改变

图 1.3 在强相互作用和弱电相互作用规范理论中的相互作用顶点

到此为止的这个理论有一个严重的缺点，即所有的粒子都是无质量的。通过简单地把通常的质量项包括到拉氏量中来补救是不可能的，因为这样的项破坏 $SU(2)\times U(1)$ 对称性，而我们已经假定这个对称性是严格的。通常的矢量玻色子质量项还导致理论不可重整。出路是把质量看做是 $SU(2)\times U(1)$ 对称性“自发破缺”而产生的，这可以通过与标量的“希格斯场”耦合来实现。在以后的几章中将对这一点予以充分的解释，这里只提一点就够了，即靠这种方法可以得到一种使所有的粒子都能获得任意有限质量的可重整理论。光子和中微子可以以一种自然的方式仍然保持无质量。

由于质量与手征性不对易，物理粒子未必是 $SU(2)\times U(1)$ 多重态的成员。这导致家族之间的味混合。基于同样的原因，弱超荷 $U(1)$ 并不一定就是电磁的 $U(1)$。第六章将详细地讨论这些问题。

另一方面，色多重态都是质量本征态，因为右手夸克和左手夸克可以有相同的色。实验证据表明色 $SU(3)$ 没有自发破缺。

从“规范化” $SU(2)\times U(1)$ 得到的弱电相互作用重新产生出所有已知的现象，而且还预言了一些新的现象。其中主要的是存在“中性流”，它已由实验证实。然而，规范矢量玻色子还没有被发现，可能是因为它们的质量太高，按照理论估计大约为 80 GeV/c^2[译者注]。

由于色 $SU(3)$ 的结构，夸克-胶子耦合在大动量时（或小距离时）趋向于零，这就是称之为“渐近自由”的现象。于是，利用能把大的动量转移给夸克的“探针”，应能探测到强子内部的准自由夸克。这一点的确已经成功地被实验证实。

同样，人们期望当趋向零动量（或无穷大距离）时，夸克与

[译者注]规范矢量玻色子已经在 1983 年初在CERN发现，详细请见第159页译者注。

胶子的耦合会无限地增长。有些理论迹象表明这一点是正确的，它导致“夸克禁闭”（quark confinement）。这就是说，夸克（以及胶子）不会孤立地做为物理状态存在，而只能成为色单态的束缚态（强子）的组分。加入了夸克禁闭思想的一些唯象模型在解释强子性质上非常成功，但是从第一原理出发对这一思想的证明仍然没有找到。

从一个规范原理推导出所有的相互作用，这一思想有着内在的美学的魅力，而且在$SU(2)\times U(1)\times SU(3)$基础上建立的规范理论导致很多预言，它们相继为实验所证实。然而，无论从实验观点还是从理论观点来看，都有很多仍然不能回答的问题。

实验上最重要的未解决的问题是重的弱电规范玻色子的存在问题[译者注]（重要程度稍差一点的是希格斯玻色子的存在问题）。在这些粒子被实际观测到以前，弱电规范理论并没有通过严格的检验。

理论上有很多更使人迷惑不解的问题：

——为什么左手和右手粒子在内部变换下有不同的行为？

——为什么在夸克和轻子味之间有一一对应关系？

——为什么有这样多的家族？“谁安排了这一切？”

——质量到底从哪里来的？或者说在对称性自发破缺中到底发生了什么事情？

——能够告诉我们把某种严格的对称性(例如$SU(2)\times U(1)\times SU(3)$)而不是把另外一些象重子数那样的对称性规范化的原理是什么？

目前就这些问题中的某些所做的尝试都倾向于把现有的规范群嵌入到一个更大的单纯规范群中，同时原封不动地保留所有的基本的理论概念。这些理论通称为“大统一理论”[16]，它们对

[译者注]见159页译者注。

某些问题做出了解答。例如，象重子数这类没有被“规范化”的对称性，都是明显受到破坏的。但是仍有很多问题回答不了，而诸如对称性自发破缺这样的问题甚至变得更加使人迷惑不解。

人们虽不能促成但已经感觉到答案在于一个全新的方向，也许是物质的新的一个亚层次，然而它对我们来讲，没有新的实验暗示，则是不可想象的。在这个问题上，猜测或许毫无价值。在这期间，用目前这种规范理论取得了不少成绩，把这些成绩介绍给读者正是本书的目的。

1.3 符号和约定

除非另作说明，我们使用的单位均为 $\hbar=c=1$。闵可夫斯基(Minkowski)时空中的对角度规张量有下列对角元

$$g^{00}=-g^{11}=-g^{22}=-g^{33}=1.$$

逆变时空 4-矢量 x^{μ} 有由下式规定的分量

$$x^{\mu}=(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)\equiv(x^0,\boldsymbol{x}),$$

而相应的协变矢量为

$$x_{\mu}=(x^0,-\boldsymbol{x}).$$

一些经常用到的微分算符为

$$\partial_{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},-\nabla\right),$$

$$\partial^{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}=\left(\frac{\partial}{\partial x^0},-\nabla\right),$$

$$\Box^2\equiv\partial_{\mu}\partial^{\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2-\nabla^2,$$

$$A\overleftrightarrow{\partial_{\mu}}B\equiv(\partial_{\mu}A)B-A(\partial_{\mu}B).$$

狄拉克矩阵 γ^{μ} 的选取是使 γ^0 为厄米矩阵，而 $\gamma^k(k=1,2,3)$ 为反厄米矩阵：

$$(\gamma^0)^+=\gamma^0,\ (\gamma^0)^2=1,$$

$$(\gamma^k)^+ = -\gamma^k,\quad (\gamma^k)^2 = -1 \quad (k=1,2,3)。$$

定义 γ_5 为厄米矩阵

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \qquad (\gamma_5)^2 = 1.$$

另外，我们用到符号

$$\alpha^k = \gamma^0\gamma^k \quad (k=1,2,3), \qquad (\alpha^k)^+ = \alpha^k$$

$$\sigma^k = \varepsilon^{klm}\gamma^l\gamma^m/2i, \qquad (\sigma^k)^+ = \sigma^k,$$

由此导出

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma_5\boldsymbol{\sigma}.$$

标准的表示如下

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma}^k \\ \underline{\sigma}^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^0 = \beta \equiv \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix},$$

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma}^k \\ \underline{\sigma}^k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^k = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}^k & 0 \\ 0 & \underline{\sigma}^k \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} \\ \underline{1} & 0 \end{pmatrix},$$

其中下面划了线的符号代表 2×2 矩阵：

$$\underline{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

[1]公孙龙，庄子天下篇第三十三（大约公元前 300 年）。

[2]J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum mechanics* (Mc Graw-Hill, NewYork, 1964); *Relativistic Quantum Fields* (Mc Graw-Hill, New York, 1965).

[3]E. P. Wigner, *Ann. Math.* 40 (1934) 149.

[4]R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That* (W. A. Benjamin, New York, 1964).

[5]N. N. Bogolubov, G. G. Logunov, and I. T. Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory* (W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1975).
[6]D. P. Barber *et al*., *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1915.
[7]R. Hagedorn, *N. Cim.* 56 A (1968) 1027.
[8]K. Huang and S. Weinberg, *Phys. Rev Lett.* 25 (1970) 895.
[9]R. Hofstadter and R. W. Mc Allister, *Phys. Rev.* 98 (1955) 217.
[10]C. N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* 96 (1954) 191.
[11]T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, 104 (1956) 254; C. S. *Wu et al*., *Phys. Rev.*, 105 (1957) 1413.
[12]R. P. Feynman and M. Gell-Mann, *Phys. Rev.*, 109 (1958) 193.
[13]S. L. Glashow, Nuel. *Phys.* 22 (1961) 579.
[14]S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 19 (1964) 1264.
[15]A. Salam, in *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Aemquist and Wiksell, Stockholm, 1968).
[16]请看评述性文章 P. Langacker, *Phys. Reports*, 72 (1981) 185.

第二章 夸　　克

2.1 内部对称性

我们所知道的强子都可以分成一些似乎反映出某种基本的内部对称性的多重态．为了以简单而又具体的方式表示这一事实，通常假设强子是由具有某些基本对称性的更基础的组分——夸克所组成的。

用电磁相互作用和弱相互作用探测强子结构的实验以及所谓重夸克"原子"的发现，已经间接地证实了夸克的存在。已有的证据是与这样的图象相吻合的；即，强子不是作为基本的实体而是通过夸克参与这些相互作用的。另一方面，尽管有着许多似乎有理的解释，我们却仍然不能完全理解为什么夸克至今仍不能单独被发现。

内部对称性是指粒子组成一个一个的家族，每个家族称为一个多重态，有着简并的或接近简并的质量。每个多重态都被看做是某一内部对称群的一个不可约表示。人们力求根据实验上观察到的多重态的模式来识别出这些群。如果在一个多重态中质量不是完全相同的，人们就把与之相联系的对称性称为只是近似的对称性。在强子中间，我们早就知道有如表 2.1 所示的内部对称性 I，S，B 和 Q，它们的精确程度各不相同。

我们定义超荷 Y 为

$$Y=B+S. \tag{2.1}$$

而把经验规则表述为

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y. \tag{2.2}$$

表 2.1　强子的内部对称性

符号	量子数	对称群	保持它的相互作用	破坏它的相互作用
I	同位旋	$SU(2)$	强	电磁、弱
S	奇异数	$U(1)$	强、电磁	弱
B	重子数	$U(1)$	所有的	无
Q	电荷	$U(1)$	所有的	无

1. 同位旋

让我们来复习一下熟知的同位旋（Isospin）. 实验上的证据暗示，核子和 π 介子可以分属下列多重态：

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

其中 π_1，π_2，π_3与观察到的 π 介子的关系为：$\pi^{\pm} = 2^{-1/2}(\pi_1 \pm \pi_2)$ 和 $\pi^0 = \pi_3$。每个多重态的成员具有几乎相等的质量，小的质量差可认为是电磁修正引起的。

若不去管这些电磁修正，则核子和 π 介子体系在下述同位旋 $SU(2)$群的表示矩阵变换下是不变的

$$\begin{aligned} N &\to N + \delta N, & \delta N &= -i\omega_a I_a N, \\ \pi &\to \pi + \delta\pi, & \delta\pi &= -i\omega_a I_a \pi, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 ω_a 是任意的无穷小实数，而同位旋分量 $I_a\,(\alpha = 1, 2, 3)$ 是 $SU(2)$的生成元，它们满足如下对易关系：

$$[I_\alpha, I_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} I_\gamma. \tag{2.5}$$

核子二重态组成二维表示的基[注a]，在此表示中$2I_a$用2×2泡

[注 a]我们用 $\underline{n}$ 来代表一个群的 n-维不可约表示，或代表实现这个表示的 n-维矢量空间。

利矩阵τ_a表示：

$$\underline{2}:\ I_a=\frac{1}{2}\tau_a,\qquad \tau_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \tau_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}.$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

$$I_aN=\frac{1}{2}\tau_aN.$$

$$\delta N_i=-\frac{i}{2}[\omega_1(\tau_1)_{ij}+\omega_2(\tau_2)_{ij}+\omega_3(\tau_3)_{ij}]N_j.$$

π介子三重态组成三维不可约表示的基：

$$\underline{3}:\quad (I_a)_{\beta\gamma}=-i\varepsilon_{a\beta\gamma},$$

$$(I_a\pi)_\beta=(I_a)_{\beta\gamma}\pi_\gamma=-i\varepsilon_{a\beta\gamma}\pi_\gamma,$$

$$\delta\pi_\beta=\varepsilon_{\beta a\gamma}\omega_a\pi_\gamma.$$

或
$$\delta\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\pi}.$$

表示$\underline{3}$是特殊的，在此表示中其维数等于生成元的个数，而I_a的矩阵表示可直接由（2.5）式中的结构常数$\varepsilon_{a\beta\gamma}$求得。它被称为伴随表示(adjoint representation)．$SU(2)$的其它不可约表示都是由角动量理论所熟知的。它们的可能维数是$2I+1(I=0,1/2,1,3/2\cdots)$．

伴随表示还可以用如下的另一种形式来表示：如果$x_i(i=1,2)$象$\underline{2}$那样变换，即

$$\underline{2}:\quad \delta x_i=-\frac{i}{2}\omega_a(\tau_a)_{ij}x_j, \tag{2.8}$$

则象$\underline{3}$那样变换的$y_a(\alpha=1,2,3)$可表示为：

$$y_a=(x^+I_ax)=\frac{1}{2}x_i^*(\tau_a)_{ij}x_j.$$

或
$$\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}(x^+\boldsymbol{\tau}x). \tag{2.9}$$

由以下计算可以证明（2.9）式和（2.7）式是等价的。

$$\begin{aligned}\delta y_\alpha &= (\delta x^+ I_\alpha x) + (x^+ I_\alpha \delta x)\\ &= i\omega_\beta (x^+ [I_\beta,\ I_\alpha] x)\\ &= -\omega_\beta \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} (x^+ I_\gamma x)\\ &= -i\omega_\beta(-i\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}) y_\gamma. \end{aligned} \tag{2.10}$$

2. 规范群

量子数 B, Q, S 标志与一维么正群 $U(1)$同构的几个相互对易的群的一维表示。群运算就是把粒子态乘上一个相因子

$$\begin{aligned} &B: \psi \to e^{-i\alpha B}\psi, && B = \psi \text{ 的重子数},\\ &Q: \psi \to e^{-i\beta Q}\psi, && Q = \psi \text{ 的电荷},\\ &S: \psi \to e^{-i\gamma S}\psi, && S = \psi \text{ 的奇异数}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 α, β, γ 都是任意的实数。

3. 更一般的内部对称性：$SU(n)$

更一般地讲，粒子可以按组成$SU(n)$ 群表示的多重态来分类。这是一个与所有 $n\times n$ 特殊么正复矩阵 U ($\det U=1$，$U^+U=1$)组成的群同构的群。$\det U=1$ 的条件挑选出了该矩阵群的一个连通子群。而要求 $U^+U=1$ 则保证了在群变换下粒子态的模(norm)保持不变。

一个一般的 $n\times n$ 复矩阵有 $2n^2$ 个任意的实参数。要求 $U^+U=1$ 则引入了 n^2 个条件，而 $\det U=1$ 又引入了一个条件。因此，还剩下 n^2-1 个任意参量。相应地，$SU(n)$有 n^2-1 个生成元L_α，它们服从

$$[L_\alpha,\ L_\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma \tag{2.12}$$

一个任意的无穷小群元由

$$U = 1 - i\omega_\alpha L_\alpha \tag{2.13}$$

给出，式中 ω_α 是任意的无穷小实数。生成元 L_α 可以取为厄米的。结构常数 $f_{\alpha\beta\gamma}$ 可以取为实的，并对 α, β, γ 是完全反对称的。由定义知，最小的非平庸的不可约表示（基础表示（fundamental

representation)）是 n 维的。总是存在伴随表示，它的维数等于生成元的个数，且

$$(L_\alpha)_{\beta\gamma} = -if_{\alpha\beta\gamma},$$

其它不可约表示的可能维数取决于 n。

4. 么正对称性(Unitary Symmetry)

与同位旋和超荷守恒相对应的近似的对称性可以扩大成与 $SU(3)$群相联系的所谓的么正对称性。然而，这种对称性既使对于强相互作用也是近似的。扩大的动机来自于观察到强子可以按照把同位旋多重态包括在内的更大的多重态来分类。例如，我们可以看出有一个自旋为$\frac{1}{2}$的重子组成的八重态（N-八重态），一个自旋为$\frac{3}{2}$的重子的十重态（Δ-十重态），一个自旋为 0 的介子八重态（π-八重态）和一个自旋为 1 的介子的八重态（ρ-八重态）。这些态都在图 1.1 中表示了出来，并在图 2.1 中以 Y-I 图的形式画了出来。

注意，重子和反重子组成它们各自的独立的多重态，而介子和反介子却处在同一个多重态之中。把$SU(3)$认为是有关的对称群，是基于 $\underline{8}$ 和 $\underline{10}$ 为该群的可能的不可约表示，其中 $\underline{8}$ 是伴随表示。

么正对称性被强相互作用所破坏反映在其多重态内部有大的质量分裂上。盖尔曼(Gell-Mann)和大久保(Okubo)等人基于假设破坏么正对称性的相互作用在 $SU(3)$下象 Y 那样变换而提出了一个质量公式[1]：

$$M(m,n) = a + bY - c[2I(I+1) - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{4}{3}(n-m)Y - \frac{1}{3}m(m+2) - \frac{1}{3}n(n+2) + \frac{1}{9}(m-n)^2], \quad (2.14)$$

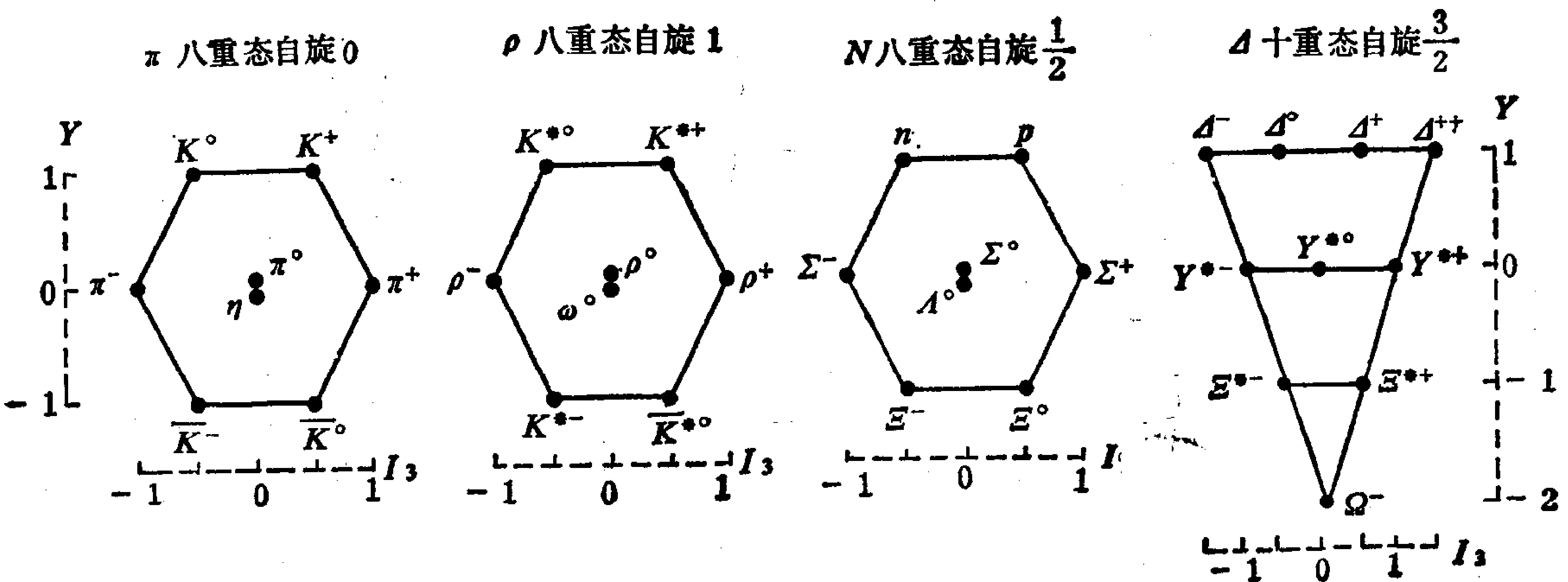

π 八重态自旋0
ρ 八重态自旋1
N八重态自旋1/2
Δ 十重态自旋3/2
Y
1
0
−1
K°
K⁺
π⁻
π⁺
π°
η
K⁻
K°
I₃
K*°
K*⁺
ρ⁻
ρ⁺
ρ°
ω°
K*⁻
K*°
n
p
Σ⁻
Σ⁺
Σ°
Λ°
Ξ⁻
Ξ°
Δ⁻
Δ°
Δ⁺
Δ⁺⁺
Y*⁻
Y*°
Y*⁺
Ξ*⁻
Ξ*⁺
Ω⁻
−2

图 2.1 么正多重态

式中 a, b, c 都是经验常数，(m, n) 标志不可约表示：$\underline{8}$ 相应于（1，1），$\underline{10}$ 相应于（0,3）（见 2.2 节）。这个公式相当好地解释了观察到的质量分裂，对于建立么正对称性，这个公式也起了历史上的重要作用。

很自然地推测基础表示 $\underline{3}$ 或许也可以实现，这就导致了夸克假设。当然，主要的动机是要减少基本粒子的数目；但如果假定夸克就是重子，则夸克假设也自然地解释了重子多重态和介子多重态之间在包含反粒子上的差异（见 2.3 节）。用不同类夸克之间的质量差还将对破坏么正对称性的机制找到一个简单而又具体的起源。

2.2 $SU(3)$的表示[2]

1. 基础表示

$SU(3)$群有八个生成元 $L_\alpha(\alpha=1,\cdots,8)$，它们满足

$$[L_\alpha, \ L_\beta]=if_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma, \tag{2.15}$$

其中 $f_{\alpha\beta\gamma}$是对于 α, β, γ 完全反对称的实常数。基础表示是 $\underline{3}$，在这个表示中生成元记为

$$L_\alpha=\frac{1}{2}\lambda_\alpha \ (\alpha=1,\cdots,8), \tag{2.16}$$

形式，其中 λ_α 是3×3 厄米矩阵。它们作用在如下的基矢上：

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

无穷小群元由变换

$$x'=Sx, \quad S=1-\frac{i}{2}\omega_\alpha\lambda_\alpha \tag{2.18}$$

来表示，其中 $\omega_\alpha(\alpha=1,\cdots,8)$是任意的无穷小实数。表 2.2 给出

了一组满足（2.15）式的矩阵。就其结构而言，前三个矩阵分别为 $2I_1$，$2I_2$，$2I_3$。最后一个矩阵是对角的并与同位旋对易，它恒等于$\sqrt{3}Y$，这些矩阵被称为“盖尔曼矩阵”，它们是泡利矩阵的推广。

表 2.2　盖尔曼矩阵

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

结构常数 $f_{\alpha\beta\gamma}$ 可以通过矩阵 λ_a 的直接对易运算而求得，在表 2.3 中列出了其结果。当然，它们对于该群的任何表示都适用。然而，表 2.3 给出的其它性质只适用于基础表示。

表 2.3　λ_a的性质

$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta]=2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma$			
$\alpha\beta\gamma$	$f_{\alpha\beta\gamma}$(反对称)	$\alpha\beta\gamma$	$d_{\alpha\beta\gamma}$(对称的)
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	1/2	146	1/2
156	$-1/2$	157	1/2
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$
257	1/2	247	$-1/2$
		256	1/2
		338	$1/\sqrt{3}$

345	$1/2$	344	$1/2$
367	$-1/2$	355	$1/2$
458	$\sqrt{3}/2$	366	$-1/2$
678	$\sqrt{3}/2$	377	$-1/2$
		448	$-1/(2\sqrt{3})$
		558	$-1/(2\sqrt{3})$
		668	$-1/(2\sqrt{3})$
		778	$-1/(2\sqrt{3})$
		888	$-1/\sqrt{3}$

$$\mathrm{Tr}\lambda_\alpha = 0$$

$$\mathrm{Tr}\lambda_\alpha\lambda_\beta = 2\delta_{\alpha\beta}$$

$$\mathrm{Tr}\lambda_\alpha[\lambda_\beta, \lambda_\gamma] = 4if_{\alpha\beta\gamma}$$

$$\mathrm{Tr}\lambda_\alpha\ \{\lambda_\beta, \lambda_\gamma\} = 4id_{\alpha\beta\gamma}$$

我们注意到，在表 2.2 给出的结构中，λ_4 和 λ_5 组成另一个类泡利矩阵集合（称为 U-旋）的两个成员。λ_6 和 λ_7 也是如此（称为 V-旋）。每一个集合中缺的成员可以通过把 λ_3 和 λ_8 适当地线性组合而得到。这样，生成元的原始集合可以用另外两种等价的集合来代替。这些都列在表 2.4 中。

表 2.4　$SU(3)$生成元的等价集合

(1) $\underbrace{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,}_{2\ (I\text{-自旋})}\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6,\ \lambda_7,\ \lambda_8\ (=\sqrt{3}Y)$

(2) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \underbrace{\rho_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,}_{2\ (U\text{-自旋})}\ \lambda_6,\ \lambda_7,\ \rho'\ \ (=\sqrt{3}Q)$

(3) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \underbrace{\varepsilon,\ \lambda_6,\ \lambda_7,}_{2\ (V\text{-自旋})}\ \varepsilon'$

其中

$$\rho=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\lambda_3+\sqrt{3}\lambda_8)=I_3+\frac{3}{2}Y$$

$$\rho'=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_3+\lambda_8)=\sqrt{3}(I_3+\frac{1}{2}Y)=\sqrt{3}Q$$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\lambda_8-\lambda_3)=\frac{3}{2}Y-I_3$$

$$\varepsilon'=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\lambda_8-\sqrt{3}\lambda_3)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}Y-I_3\right)$$

---

2. 杨图 (Young's tableaux)

取$\underline{3}$与其自己直乘任意次，我们立即求得高维表示$\underline{3}\times\underline{3}$，$\underline{3}\times\underline{3}\times\underline{3}$，等等。但是这些表示都是可约的。

为了把这些可约表示分解为不可约表示，我们把相应的直积空间分解成不变的不可约子空间[注 b]。于是，由基础表示在这些子空间中诱导出的表示都是不可约的表示。

设$x_{i_1\cdots i_n}$为一个象乘积$x_{i_1}\cdots x_{i_n}$那样变换的张量。它可以被分解成一些对于指标i_1，$\cdots i_n$的置换有不同的对称类型的张量。由定义知，一个属于确定对称类的张量可以从$x_{i_1\cdots i_n}$通过以下图解方法得到：

(a)先取出n_1个指标，把它们对称化。这种操作可以用下图形象地表示：

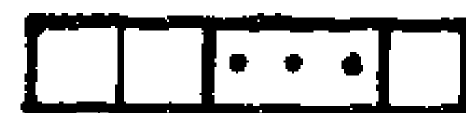
n_1个盒子（装进所选取的标号）



[注 b] “不变的”意指这个空间在群变换下仍变为自身。“不可约的”意指它不包含有更小的不变子空间。

(b)接下去，从其余的指标中取出 $n_2 \leqslant n_1$ 个，也把它们对称化：

n_2 个盒子（装进所选取的标号）



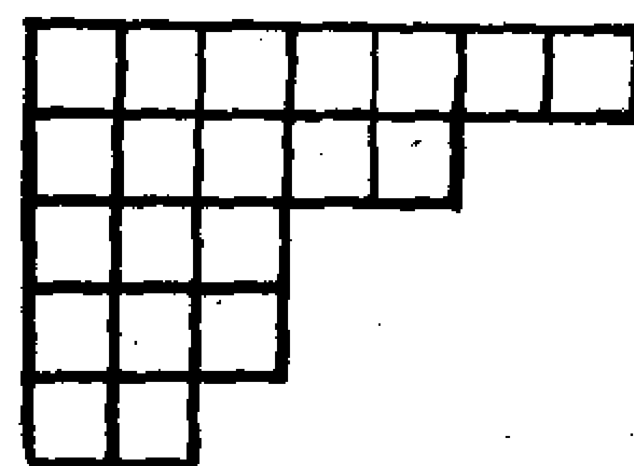
(c)重复这些过程，直到所有的指标用完为止。把所得到的各行依次堆积起来形成如下表格形式，称之为杨图。

n_1 个盒子

n_2 个盒子

⋮

n_h 个盒子 $(n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_h)$



整数集 $\{n_1, \cdots, n_h\}$ 是 n 的任意的可能配分 (par ti tion)：

$$n = n_1 + \cdots + n_h. \quad (n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_h). \tag{2.19}$$

(d)最后，分别地、独立地把该表格中每一列的指标反对称化。

一个杨图的几何图样表征一种对称类。所以，类的数目就等于 n 的可能配分的数目。属于一个给定对称类的张量，彼此的差别只在于杨图的每一个盒子里的指标选择不同。通常约定，行的指标置换要先于列的指标置换。在这一约定下，一个杨图中每一列出现的指标都是反对称的，但是，每一行出现的指标当且仅当它们不是对不同的列指标反对称化时才在置换下是对称的。例如：

这些不是独立的张量：（其中1表示 i_1，等等）

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} = -\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&4\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}$$

这些不是独立的张量

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

这些是独立的张量

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \neq \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

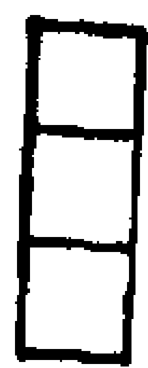
下面，我们不加证明给出两个重要定理：

(a)在一个给定对称类中的所有张量形成一个不变的不可约空间。因此，由基础表示在这个空间中诱导出的群表示是不可约的。

(b)通过所有对称类生成的不可约表示不会有任何遗漏。

3. 不可约表示

因为一个张量的指标只能取 $i=1,2,3$ 三个值，所以杨图中的一列不能有多于三个盒子。左图表示一个0阶张量，它相应于一维平庸表示（即，它在群的作用下是不变量）。如果它是作为一个较大的图的一部分出现的话，这样的一列就可以省略：



$$\underline{1}=\begin{array}{|c|}\hline \\\hline \\\hline \\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline &\\\hline &\\\hline &\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline &&\\\hline &&\\\hline\end{array}=\cdots \tag{2.20}$$

因此，$SU(3)$群的最普遍的杨图至多有两行：

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline k_1&k_2&\cdots&k_m&i_1&i_2&\cdots&i_n\\\hline l_1&l_2&\cdots&l_m\\\cline{1-4}\end{array}\equiv\left(\begin{matrix}k_1\cdots k_m\\ l_1\cdots l_m\end{matrix}\right| i_1\cdots i_n\bigg). \tag{2.21}$$

所以，一个不可约表示用两个整数 (m,n) 就可以完全标志。

把反对称的一对指标 (k_λ,l_λ) 用另一个指标 j_λ 按如下方式来代替是方便的：

$$x^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_n}\equiv\left(\begin{matrix}k_1\cdots k_m\\ l_1\cdots l_m\end{matrix}\right| i_1\cdots i_n\bigg)\varepsilon^{j_1k_1l_1}\cdots\varepsilon^{j_mk_ml_m}. \tag{2.22}$$

这个张量对于指标$\{j_1,\cdots,j_m\}$和$\{i_1,\cdots,i_n\}$是对称的。可以直接证明

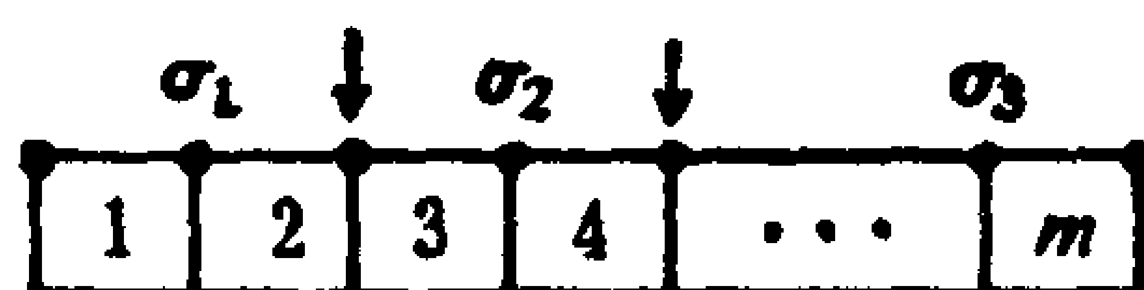
$$\sum_{j=1}^{3}x^{jj_2\cdots j_m}_{ji_2\cdots i_n}=0. \tag{2.23}$$

于是，张量 $x_{i_1\cdots i_m}^{j_1\cdots j_m}$ 的分量并不都是独立的。独立分量的个数就是不可约表示 (m,n) 的维数 $D(m,n)$。

我们现在来计算 $D(m,n)$。假设在 $\{j_1,\cdots,j_m\}$ 中，1 出现 σ_1 次，2 出现 σ_2 次，而 3 出现 σ_3 次，那时，可能的集合 $\{j_1,\cdots j_m\}$ 的数目就等于

$$P_m = \text{编序集合}\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 | \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=m\}\text{的数目。} \tag{2.24}$$

任何一个具有 $\sigma_2>0$ 的可能集合 $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$，可以通过在下图中的点里面任取两个点来得到，它有 $\binom{m+1}{2}$ 种方式：



而任何一种具有 $\sigma_2=0$ 的可能集合 $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$，可以通过只取一个点得到，共有 $\binom{m+1}{1}$ 种方式。因此

$$P_m=\binom{m+1}{2}+\binom{m+1}{1}=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)。 \tag{2.25}$$

独立地选取 $\{j_1,\cdots,j_m\}$ 和 $\{i_1,\cdots,i_n\}$ 的方式总数是 P_mP_n。(2.23) 式的要求引入了 $P_{m-1}P_{n-1}$ 个条件。所以 $D(m,n)=P_mP_n-P_{m-1}P_{n-1}$，或

$$D(m,n)=\frac{1}{2}(n+1)(m+1)(n+m+2)。 \tag{2.26}$$

(m,n) 和 (n,m) 表示有相同的维数，称为彼此共轭 (conjugate)：

$$\overline{(m,n)}=(n,m) \tag{2.27}$$

表示 (n,n) 是自轭表示 (self-conjugate)，其维数 $D(n,n)=(n+1)^3$。

在不可约表示 (m,n) 中，L_a 的矩阵表示可以从以下变换规

律中求出：

$$x'^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_n}=\left(S^*_{j_1 j_1'}\cdots S^*_{j_m j_m'}\right)\left(S_{i_1 i_1'}\cdots S_{i_n i_n'}\right)x^{j_1'\cdots j_m'}_{i_1'\cdots i_n'},\quad(2.28)$$

其中，S_{ij} 由(2.18)式给出。上式说明，只要将 λ_a 换成 $-\lambda_a$，则上指标就象下指标一样的变换。

反对称张量 ε^{ijk} 可用来升、降指标：

$$x^i=\varepsilon^{ijk}A_{jk},\quad(A_{jk}=-A_{kj}),\qquad(2.29)$$

其中 A_{jk} 象 $x_j x_k$ 那样变换。

在表 2.5 中我们按维数增加的顺序列出了一些不可约表示。表 2.6 举出了一些例子来说明把直积表示分解成不可约表示之和的一些规则。

表2.5 $SU(3)$的不可约表示

(m,n)	$D(m,n)$	表格形式	张量
	1		1
(0,1)	3		$x_i(i=1,2,3)$
(1,0)	$\overline{3}$		x^i
(0,2)	6		x_{ij}
(2,0)	$\overline{6}$		x^{ij}
(1,1)	$8=\overline{8}$		$x^i_j\left(\sum_{i=1}^{3}x^i_i=0\right)$ 伴随表示
(0,3)	10		x_{ijk}
(3,0)	$\overline{10}$		x^{ijk}

(1,2)	15		$x^{i}_{jh}\left(\sum_{i=1}^{3}x^{i}_{ih}=1\right)$
(2,1)	$\overline{15}$		$x^{ij}_{h}\left(\sum_{i=1}^{3}x^{ii}_{h}=1\right)$
(0,4)	15′		x_{ijkl}
(4,0)	$\overline{15}'$		x^{ijkl}
(1,3)	24		$x^{i}_{jkl}\left(\sum_{i=1}^{3}x^{i}_{ikl}=0\right)$
(3,1)	$\overline{24}$		$x^{ijk}_{l}\left(\sum_{i=1}^{3}x^{ijk}_{i}=0\right)$
(2,2)	$27=\overline{27}$		$x^{ij}_{kl}\left(\sum_{i=1}^{3}x^{ij}_{il}=0\right)$

表 2.6 直积表示的约化

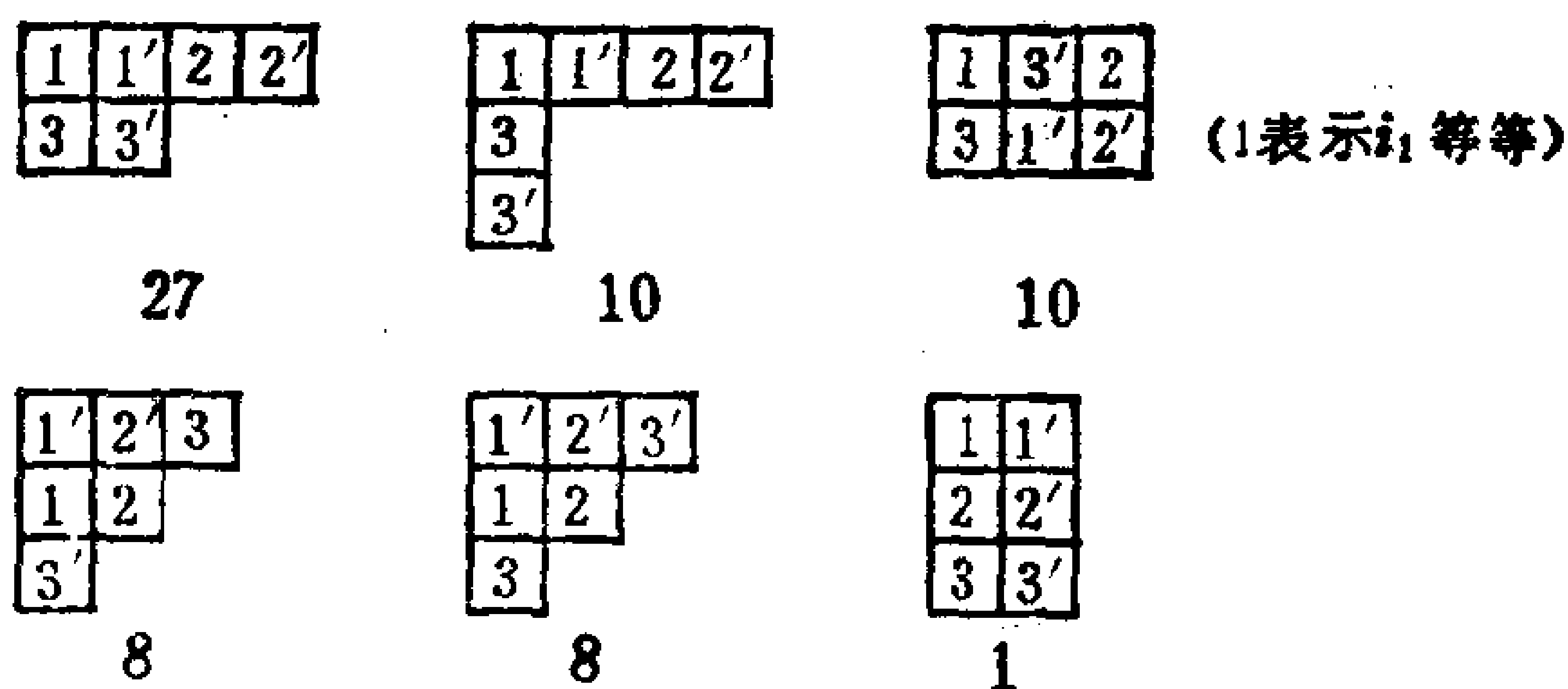
(a) 3×3 = × = + = $\overline{3}+6$

(b) $\overline{3}\times3$ = × = + = $1+8$

(c) 6×3 = × = + = $8+10$

(d) $3\times3\times3=(\overline{3}+6)\times3=1+8+8+10$

(e)* 8×8 = 1 2 3 × 1′ 2′ 3′ $=1+8+8+10+\overline{10}+27$



*：把6个标号以所有可能的组合方式来安排，但在得到的图中成对出现的(1，3)或(1′，3′)要保持反对称性。

2.3 夸克模型[3]

1. 夸克作为基本的三重态

我们把基础表示$\underline{3}$的矢量分量x_i看做是称为夸克的粒子态。而共轭表示$\overline{3}$的那些分量称为反夸克[注c]。那时，所有更高维的表示都可以看成是夸克和反夸克或者是夸克、反夸克自己的组合态。

实际上，从表示$SU(3)$群的观点来看，我们所需要的只是$\underline{3}$，因为正如表2.6所示，$\overline{3}$可以由$\underline{3}\times\underline{3}=\overline{3}+\underline{6}$生成。然而，我们希望能区分粒子和反粒子。为此，我们把夸克和反夸克分别规定为$\underline{3}$和$\overline{3}$，并规定它们有着数值相等但符号相反的重子数B，后者是与$SU(3)$对易的一个$U(1)$群的生成元。我们规定夸克的$B=1/3$，反夸克$B=-\frac{1}{3}$。于是，在$\underline{3}\times\underline{3}$中出现的$\overline{3}$和反夸克不同，因为它具有$B=2/3$。（当然，在$SU(3)$单独作用下，它仍象一个反夸克那样变换。）

如果我们认真地处理夸克，那么我们最终必然会遇到它们之间的相互作用问题。不管我们把夸克当做是真实的客体，还是做为只是数学的结构，它们的束缚态量子数都由纯群论方法决定。

[注c]注意，$\underline{3}$和$\overline{3}$是不同的。不象$SU(2)$中的情形，在那里$\overline{2}$和$\underline{2}$是等价的。

照通常惯例，我们把夸克命名为 u、d、s，它们分别代表“上”（up），“下”（down）和“奇”（strange）夸克。这些叫做一个夸克的不同的“味”。同样，反夸克称为 $\bar{u}$、$\bar{d}$ 和 $\bar{s}$。更明显地可以写成

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix},\quad \bar{x}=\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\bar{u}\\\bar{d}\\\bar{s}\end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

这样，一个 u 夸克相应于 $\begin{pmatrix}u\\0\\0\end{pmatrix}$，一个 d 夸克相应于 $\begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix}$，等等。

定义同位旋和超荷为

$$I_a=\frac{1}{2}\lambda_a\ (a=1,\ 2,\ 3),$$

$$Y=\lambda_8/\sqrt{3}. \tag{2.31}$$

其中 I_3 和 Y 两个矩阵在以夸克为基时是对角的：

$$I_3=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\0&1/3&0\\0&0&-2/3\end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

同位旋的平方以及奇异数 S、电荷 Q 也都是对角矩阵：

$$I(I+1)\equiv I_1^2+I_2^2+I_3^2=\begin{pmatrix}3/4&0&0\\0&3/4&0\\0&0&3/4\end{pmatrix},$$

$$S\equiv Y-B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

$$Q\equiv I_3+\frac{1}{2}Y=\begin{pmatrix}2/3&0&0\\0&-1/3&0\\0&0&-1/3\end{pmatrix}.$$

由(2.28)式知，反夸克的I_3和Y是夸克的相应的量取相反的符号。于是，S和Q也取相反的符号。然而，$I(I+1)$对于夸克和反夸克是相同的。所有这些量子数都列在表2.7中。

表2.7　夸克的量子数

	夸克			反夸克		
	u	d	s	$\bar{u}$	$\bar{d}$	$\bar{s}$
I	1/2	1/2	0	1/2	1/2	0
I_3	1/2	-1/2	0	-1/2	1/2	0
Y	1/3	1/3	-2/3	-1/3	-1/3	2/3
Q	2/3	-1/3	-1/3	-2/3	1/3	1/3
B	1/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3
S	0	0	-1	0	0	1

2. 夸克作为基本组分 (building block)

不可约表示(m, n)是在张量$x^{j_1 \cdots j_m}_{i_1 \cdots i_n}$的空间中实现的，这些张量的独立分量可以认为是由夸克和反夸克或夸克、反夸克自己所组成$D(m, n)$个粒子的多重态。我们要求每个多重态具有确定的重子数，它对该多重态中的所有粒子都相同。因此，一个多重态包含的夸克和反夸克成分是唯一确定的。

在张量$x^{j_1 \cdots j_m}_{i_1 \cdots i_n}$中，每一个下指标或者是与一个夸克相联系，或者按照(2.29)式而与一个反对称的反夸克对相联系。只需将夸克和反夸克交换一下，这条规则同样适用于上指标。不同的选择靠重子数来区分。这些可能情况都简要地归纳在表2.8中。

表2.8 在 $SU(3)$ 指标和夸克成分之间的对应关系

每个下指标 i:

是 $i=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}u\\d\\s\end{pmatrix}$ $B=1/3$

或是* $i=\begin{bmatrix}(23)\\(31)\\(12)\end{bmatrix}\longleftrightarrow\begin{bmatrix}(\bar{d}\bar{s})\\(\bar{s}\bar{u})\\(\bar{u}\bar{d})\end{bmatrix}$ $B=-2/3$

每个上指标 j:

是 $j=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}\bar{u}\\\bar{d}\\\bar{s}\end{pmatrix}$ $B=-1/3$

或是* $j=\begin{bmatrix}(23)\\(31)\\(12)\end{bmatrix}\longleftrightarrow\begin{bmatrix}(ds)\\(su)\\(ud)\end{bmatrix}$ $B=2/3$

* 关于 (ds) 等等的定义见方程(2.34).

直接应用（2.28）式可以导出下列定理：

(a) 如果 λ 是在基础表示 $\underline{3}$ 中为对角矩阵生成元，那么它在任何一个不可约表示中都是对角矩阵。

(b) 如果在基础表示中 λ 的本征值是 c_i $(i=1, 2, 3)$，则在不可约表示 (m, n) 中，（在那里，λ 作用在 $x^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_n}$ 上），λ 的本征值是

$$(c_{i_1}+\cdots+c_{i_n})-(c_{j_1}+\cdots c_{j_m}) .$$

在夸克模型中，这一定理仅仅指出在构成夸克和反夸克的组合态时，它们的 I_3 和 Y 是可加的。由此得出，电荷和奇异数也是可加的。

3. 权图 (weight diagrams)

一种显示出多重态结构的方便办法是把它的所有分量画在 I_3-Y 图上，称为不可约表示的权图。夸克 $\underline{3}$ 和反夸克 $\overline{3}$ 的权图如图 2.2 所示。

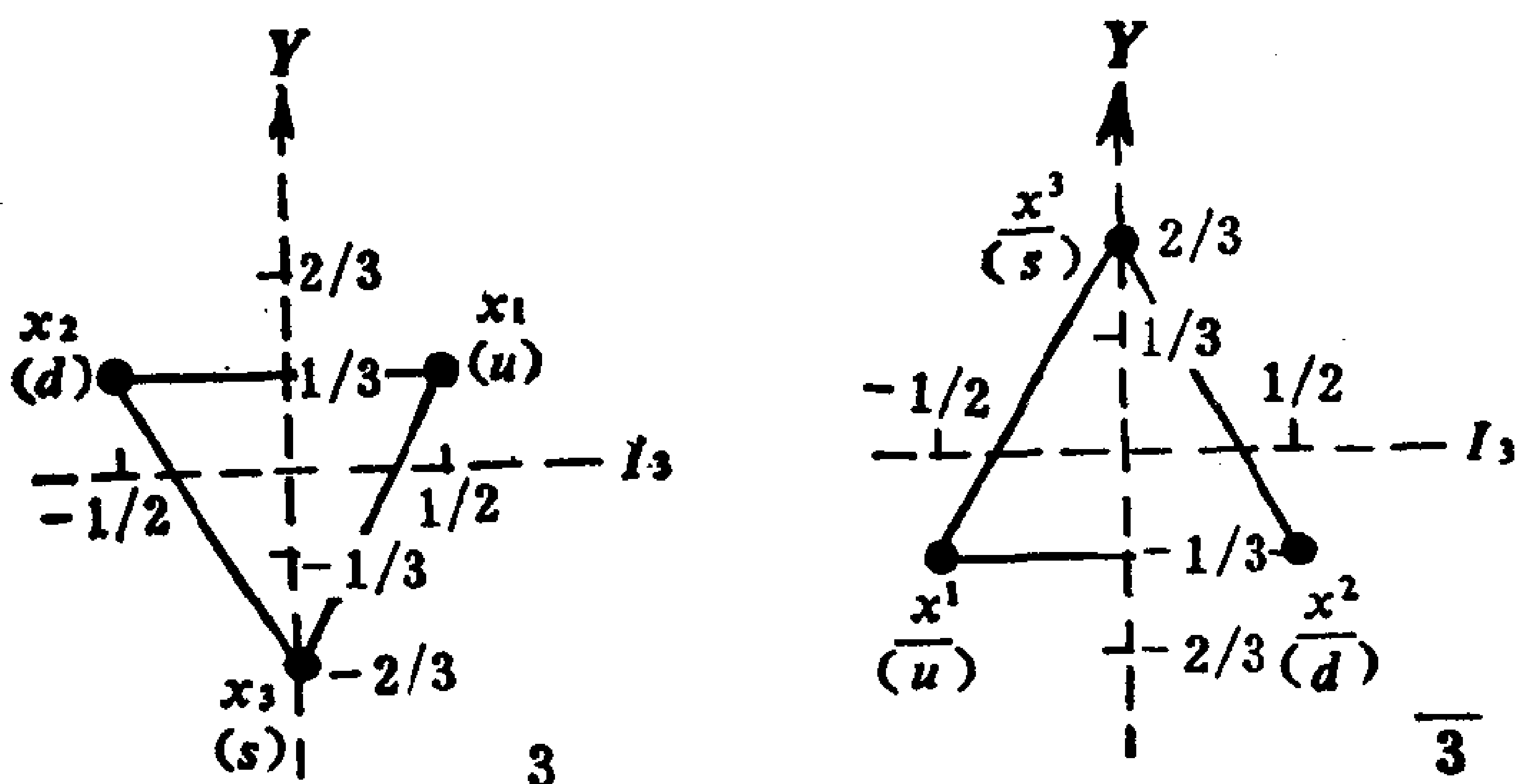


图 2.2　3 和 $\overline{3}$ 的权图

通过把 $D(m, n)$ 个格点（不一定都不同）按如下所述的方法画在 Y-I_3 图上，可以构成 (m, n) 的权图。在图 2.3 上，把矢量 $\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$、$\boldsymbol{x}_3$ 看作是格点位移矢量。那时，$x^{j_1\cdots j_m}_{i_1\cdots i_n}$ 就定位在 $(\boldsymbol{x}_{i_1}+\cdots\boldsymbol{x}_{i_n})-(\boldsymbol{x}_{j_1}+\cdots\boldsymbol{x}_{j_m})$ 处。可能的格点形成了一个菱形格子。

由于不同的分量可以占据相同的格点，所以每一个被占据的格点都用一个简并度来表征。为了得到正确的简并度，看一看上指标或下指标自己的置换会不会导致不同的分量是很重要的。此外，还必须利用条件 (2.23) 来消除多余的分量。这里我们只举出几个物理上有关的例子，而不再给出一般的规则。

权图只是描绘了 $SU(3)$ 群自身的特性，它并不能给出重子数的任何知识。这就是说，不同重子数的多重态，只要它们相

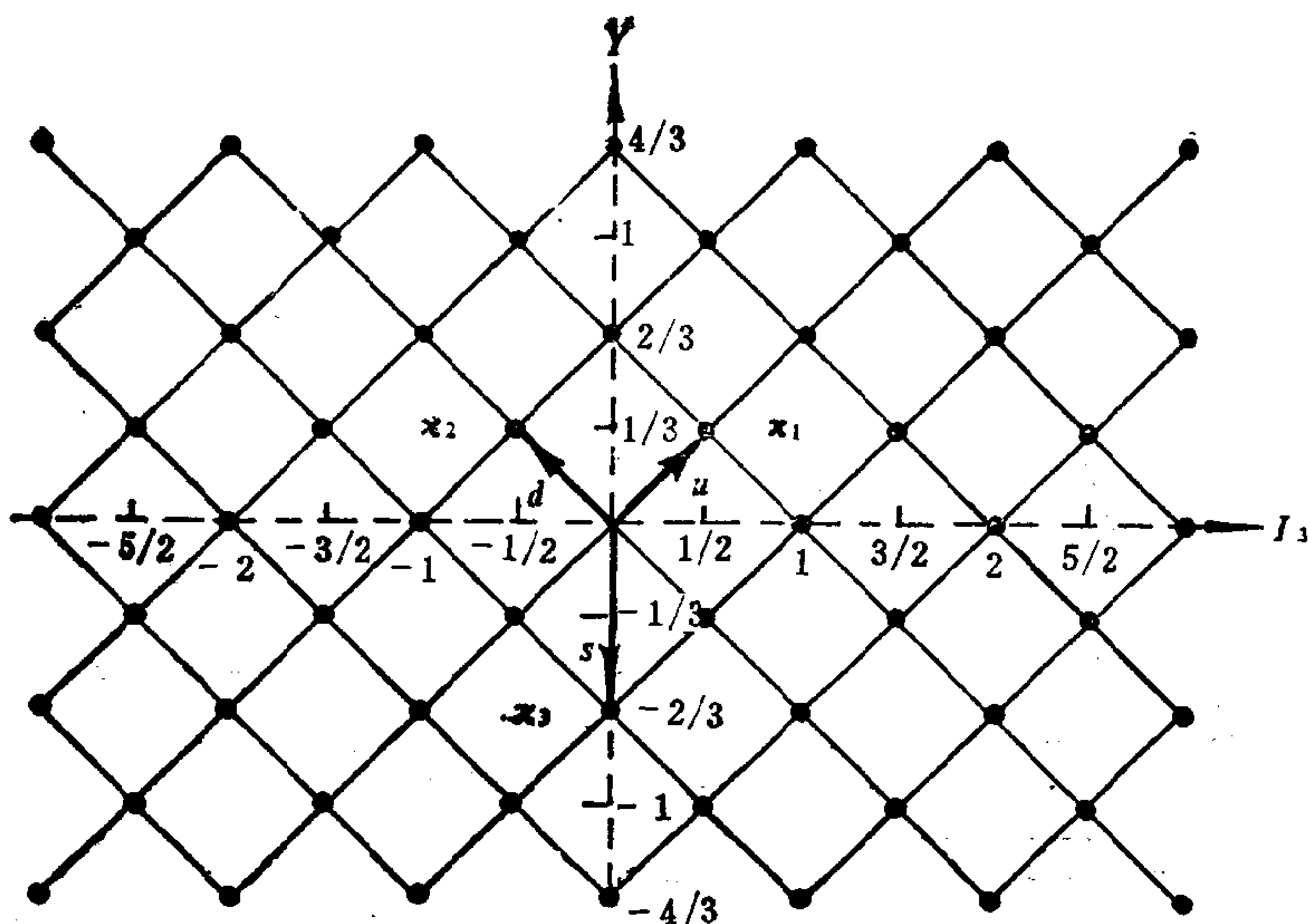


图 2.3　构造权图用的格子

应于 $SU(3)$群的相同的不可约表示，就具有相同的权图．重子数只决定了该多重态的成员所含有的夸克成分．

由于迄今没有观察到任何带有分数重子数的强子，我们将仅仅把重子数 B为整数的那些多重态看作是物理的态，而假定由于这个模型内尚不能了解的某种原因，有着分数重子数 B 的那些多重态不会在自然界出现．根据这一判据，仅当一个多重态所相应的杨图其总盒子数能被 3 整除时，该多重态才是可允许的（因为一个盒子相应于一个夸克）．从表 2.5 我们看到，它们是 $\underline{8}$、$\underline{\overline{10}}$、$\underline{10}$、$\underline{27}$、……；这是和实验结果相一致的．

$\underline{8}$、$\underline{\overline{10}}$和$\underline{10}$的权图如图 2.4 所示．对于$\underline{10}$和$\underline{\overline{10}}$没有任何格点是简并的．对于$\underline{8}$，中心的格点有二重简并（它被 x^1_1、x^2_2、x^3_3所占据，但只有两个是独立的，因为 $x^1_1+x^2_2+x^3_3=0$）．选取这两个简并态为 $2^{-\frac{1}{2}}(x^1_1+x^2_2)$ 和 $2^{-\frac{1}{2}}(x^1_1-x^2_2)$．注意到在 $SU(3)$群作用下，它们分别象 $\bar{u}u+\bar{d}d$和$\bar{u}u-\bar{d}d$ 一样变换，显然，

$2^{-\frac{1}{2}}(x_1^1-x_2^2)$ 是一个同位旋单态，而 $2^{-\frac{1}{2}}(x_1^1+x_2^2)$ 与 x_1^2 和 x_2^1 一起组成同位旋三重态。

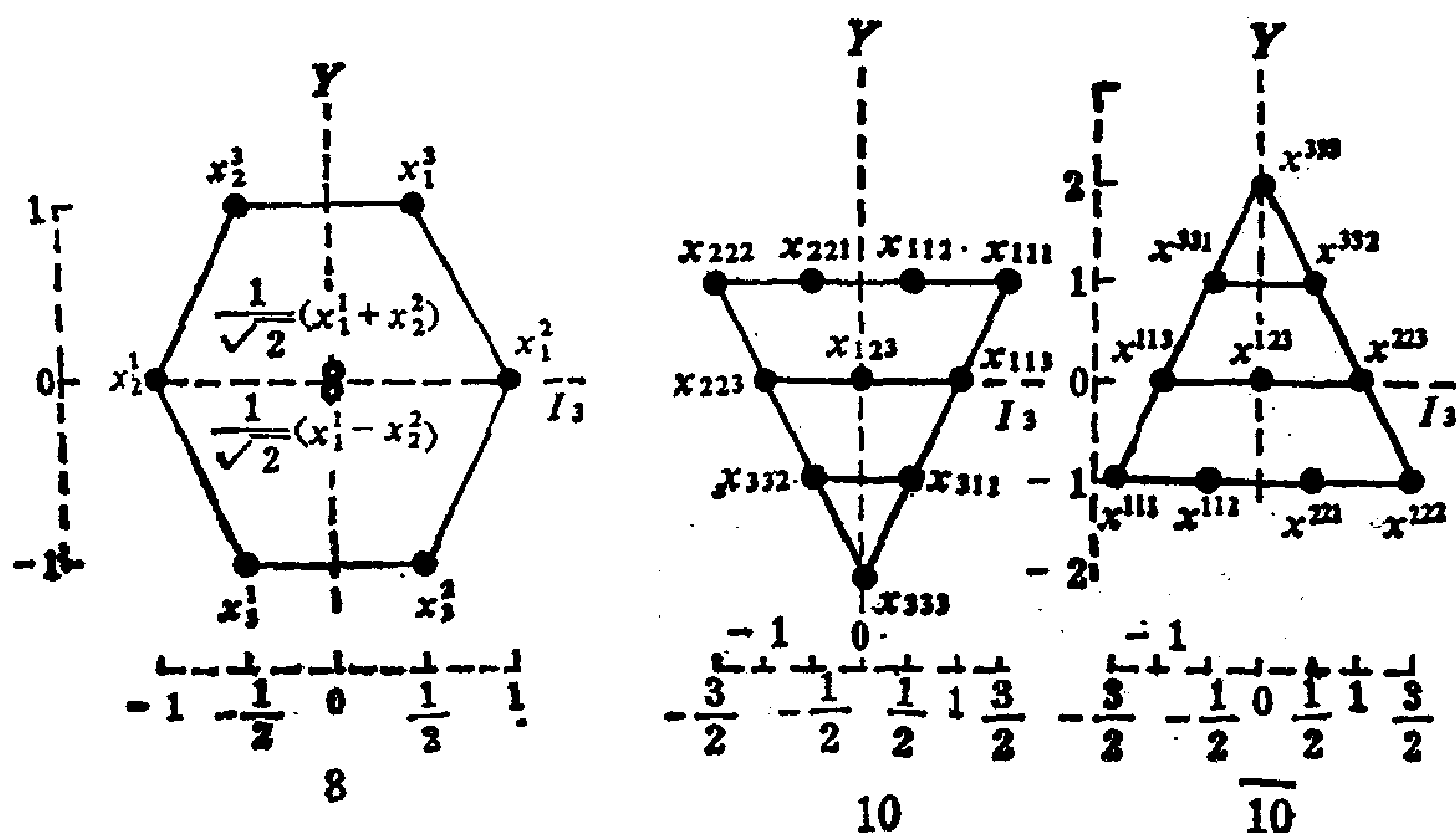


图 2.4 $\underline{8}$、$\underline{10}$ 和 $\overline{10}$ 的权图

4. 强子的组成

现在，我们来考察一下多重态 $\underline{8}$、$\overline{10}$ 和 $\underline{10}$ 的可能的夸克成分。按照表 2.8 知，$\underline{8}$ 可以有 $B=0$ 或 $B=\pm1$。

若 $B=0$，则该多重态的每个成员都由一个夸克和一个反夸克组成，其夸克成分如图2.5(a)所示。可见，该多重态既包含粒子，也包含反粒子。这样，π 八重态和 ρ 八重态都可以得到解释。

对于 $B=1$，$\underline{8}$ 的夸克成分如图 2.5(b)所示，其中的括号意义如下，例如：

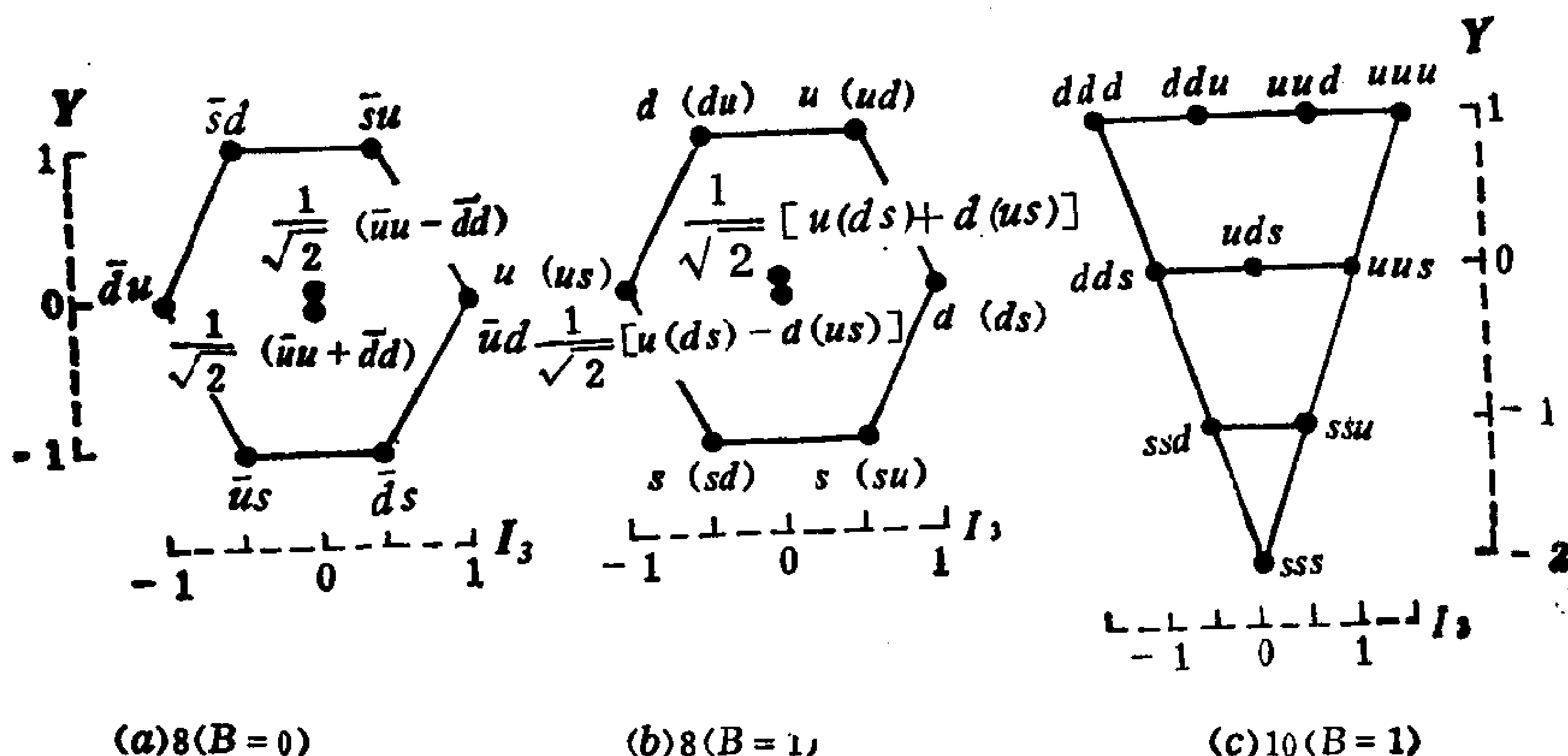
$$(ud)\equiv u(1)d(2)-u(2)d(1), \tag{2.34}$$

指标 1 和 2 表示两个不同的夸克。这就是说，$\{u(1), d(1), s(1)\}$ 和 $\{u(2), d(2), s(2)\}$ 是受 $SU(3)$ 作用的两个独立的矢

量．$B=-1$ 相应于反粒子多重态．这样，我们就可以解释 N 八重态以及独立的 $\overline{N}$ 八重态．

具有 $B=1$ 的 $\overline{10}$ 如图2.5(c)所示．它解释了 Δ 十重态．相应地，具有 $B=-1$ 的 $\overline{10}$ 解释了与之独立的 $\overline{\Delta}$ 十重态．

原则上，可以有 $B=0(qq\bar{q}\bar{q})$，$B=-1$ $(q\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q})$ 和 $B=-2$ $(\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q})$ 的$\underline{10}$，其中 q 代表夸克．这些态称为"奇特"态（"exotic" state），在低质量的强子态中似乎并不存在．



(a)8(B=0)　　(b)8(B=1)　　(c)10(B=1)

图 2.5 8和10的夸克成分

2.4 色

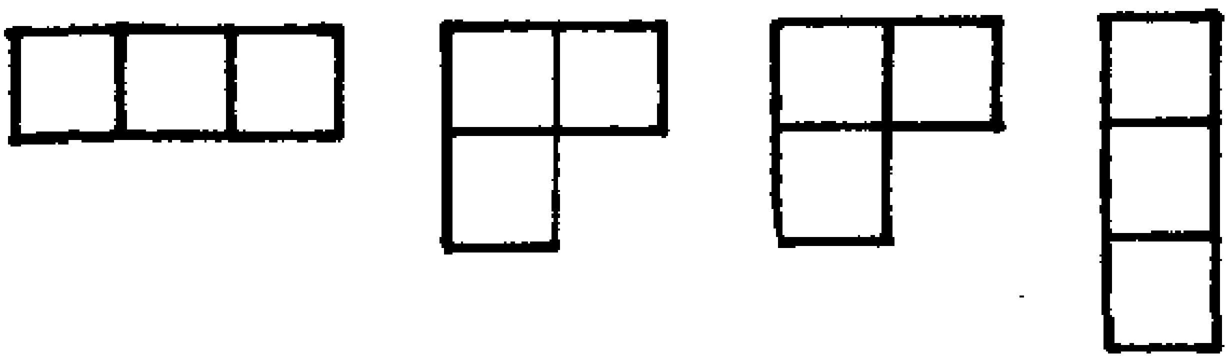
1. 独立夸克模型[4]

到此为止，这个夸克模型纯粹是一个代数模型．它只不过是一种表示 $SU(3)$ 群的方法再随便地标记上一个重子数而已．为了能对强子的质量和相互作用进行一些讨论，我们必须把动力学内容添加到该模型中，也即构造一个时空理论．这时，是否把夸克看成真实的客体就会产生差异了．

仍不考虑动力学内容而对该模型的一种扩充是 $SU(6)$ 夸克模

型。首先，认为每个夸克都具有自旋角动量，它生成$[SU(2)]_{自旋}$群。然后把$[SU(3)]_{味}\times[SU(2)]_{自旋}$嵌入到一个更大的对称群$SU(6)$中。那时，扩大以后的基由夸克的六重态，即$\{u(\uparrow),d(\uparrow),s(\uparrow),u(\downarrow),d(\downarrow),s(\downarrow)\}$所组成。在$SU(6)$的不可约表示中，人们找到一个具有$B=0$的$\underline{35}$（从$\underline{6}\times\underline{6}=\underline{1}+\underline{35}$）。它可以看成是自旋为0的$\pi$八重态和由$\rho$八重态与$\sigma$单态组成的自旋为1的九重态的统一体。人们还找到一个$B=1$的$\underline{56}$，它可以看成是一个自旋为$\frac{1}{2}$的N八重态与自旋为$\frac{3}{2}$的Δ十重态的统一体，它是由下列直积得到的：

$$\underline{6}\times\underline{6}\times\underline{6}=\underline{56}+\underline{70}+\underline{70}+\underline{20}. \tag{2.35}$$



在此，画出了相应的杨图。易见，在夸克的自旋和味同时作置换时，$\underline{56}$是完全对称的。

然而，$SU(6)$对称性把自旋角动量与轨道角动量区别对待。这一区分只有在非相对论模型中才行得通，它与洛仑兹不变性是不一致的。$SU(6)$的直接的相对论的扩充应当是把$SU(6)$嵌入到一个包含彭加勒群的更大的群中。那时，由于内部对称性将会与时空对称性结合在一起，因而这样的扩充或许会具有动力学内容。然而，所有沿着这个方向做的努力都失败了。事实上，有些定理指出了非平凡的嵌入是不可能的。不过，$SU(6)$正确地预言了35重态的介子和56重态的重子的存在这一点，可能不是巧合。或许我们可以把它看成是一个更正确的相对论理论的非相对论极限的一种近似。

从唯象的观点来看，我们可以通过假设夸克就象核壳层模型中的核子一样，是在某种等效位势中运动的真实粒子，以此来赋

予夸克模型以动力学内容。我们把它叫做**独立夸克模型**。在这一模型中，夸克占据单粒子轨道。这些轨道可以用空间波函数描写，而且有着确定的能量。于是，强子的质量可以用所占据的轨道的能量以及夸克的质量来计算。观察到的么正对称性的破坏可以归结为 s 夸克与 u、d 夸克有着不同的质量，从而可以更具体地理解盖尔曼-大久保质量公式。

由于夸克的自旋为 $\frac{1}{2}$，很自然地假设它们是费米子，因此应服从泡利不相容原理。这就是说，强子的波函数在同时交换两个夸克的味、自旋和轨道时应为反对称的。如果我们采纳由(2.35)式得到的方案，即，重子的波函数在同时交换自旋和味时是对称的，那么它必须在轨道交换时是反对称的。这样，重子中的三个夸克就必须处在不同的轨道上，其中只能有一个处在最低的S态上（除非有意料不到的简并度）。另一方面，从该模型算出的磁矩仅当没有任何轨道运动的贡献时才与实验相符，这意味着这三个夸克都处在 S 态。这就表现出了某种佯谬。

考虑强子的电荷半径时，这一佯谬变得更为严重。在介子中，夸克和反夸克都可以处在 S 态，实际上也都是 S 态，因为只有这样才相应于最低能量。由于观察到的介子电荷半径几乎与重子的相同，所以重子中的三个夸克也都应当处在 S 态。

我们总可以说 $SU(6)$ 是完全不恰当的或者说独立夸克模型是完全错误的来摆脱佯谬造成的困境，不过这样做不会给我们带来任何新的东西。反之，如果假设在$SU(6)$独立夸克模型内部还有一些迄今仍被忽视的简并度存在，那么或许可以使这一佯谬得到解决。标志这一新简并度的量子数称为“色”。如果假设对于每一种味和自旋，夸克都有几种“色”，那么只要三个夸克有着不同的色，它们就都可以处在相同的态上。显然，这要求至少有三种色。下面我们就来指出假设恰好只有三种色的优越性。

2. 色 $SU(3)$ 群[5]

如果只有三种色，我们可以给出保证不能看到孤立夸克的一条简单的规则为：仅能存在“无色”态。人们希望，能用在色的基础上建立的规范理论——量子色动力学（quantum chromodynamics），把这一规则推导出来。

于是，我们假设严格地存在着三种色，而我们的这个世界在色的改变下是不变的。这就是说，色空间是一个新的 $SU(3)$ 对称群的表示空间，这个群用$[SU(3)]_{色}$来代表，一个夸克现在按 q_{in} 变换，其中

味指标：$i=1, 2, 3$（或 u、d、s）；

色指标：$n=1, 2, 3$（或红、黄、绿）。

这些指标分别在 $[SU(3)]_{味}$ 和$[SU(3)]_{色}$下变换。反夸克$\overline{q}_{in}$象 q^{in} 那样变换。

实验上观察不到任何带有分数重子数的粒子，这一点由任何物理态都必须是色单态这一规则得到保证，这立刻意味着构成一个重子的夸克数必须能被 3 整除，因为每一个夸克相应于$[SU(3)]_{色}$杨图中的一个格子（注意，这一要求并不依赖于味的数目）。

因为一个色单态相应于（2.20）所示的杨图，所以重子中的三个夸克必须对其色指标为完全反对称。于是，根据泡利原理，它们对所有的其它指标必须是完全对称的。同样，在一个重子（例如氘核）中的六个夸克必须包括两个色单态。对于一个由夸克和反夸克组成的介子，它的态在$[SU(3)]_{色}$之下的变换应该象

$$\sum_{n=1}^{3} q^{in} q_{jn} = \sum_{n=1}^{3} \overline{q}_{in} q_{jn}. \tag{2.37}$$

作为一个实例，让我们来写出非相对论独立夸克模型中一个质子的波函数。为了计算对于这种波函数的矩阵元，我们采用了

一些适当的符号。一个夸克的所有的坐标总起来表示成

$$z=\{n,\ i,\ s,\ \boldsymbol{r}\}. \quad (坐标) \tag{2.38}$$

它们分别代表色、味、自旋和位置坐标。三个夸克的坐标分别用z_1、z_2、z_3表示，其相应的角标为n、i、s和$\boldsymbol{r}$。单个夸克的所有的量子数总起来用

$$\lambda=\{N,\ k,\ \sigma,\ l\} \quad (量子数) \tag{2.39}$$

来表示，它们分别代表色、味、自旋和空间量子数。一个单夸克波函数写成

$$\psi_\lambda(z)=C_N(n)F_k(i)\chi_\sigma(s)R_l(\boldsymbol{r}). \tag{2.40}$$

在内部对称运算下，n和i象$SU(3)$下指标那样变换（即，象对于q_{in}的作用那样），而s象一个$SU(2)$指标那样变换。（2.40）式中的各个因子选为

$$C_N(n)=\delta_{Nn},\ F_k(i)=\delta_{ki}, \tag{2.41}$$

$$\chi_\sigma(s)=\delta_{\sigma s},\ R_l(\boldsymbol{r})=R(r). \quad (s\ 波轨道波函数)$$

把C_N、F_k、χ_σ的所有分量写成列矢量形式是很方便的，把这些矢量记为

$$C_1=r=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad F_1=u=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \chi_1=\uparrow=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$C_2=y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad F_2=d=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \chi_2=\downarrow=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

$$C_3=g=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad F_3=s=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

我们可以把味和自旋结合在一起写成

$$F_k\chi_\sigma=u_\uparrow,\ u_\downarrow,\ d_\uparrow,\ d_\downarrow,\ s_\uparrow,\ s_\downarrow. \tag{2.43}$$

进而，缩写成

$$r(1) \equiv r(n_1)，等等；$$

$$d_\uparrow(1) \equiv d(i_1)[\uparrow(s_1)]，等等；$$

$$R(1) \equiv R(r_1)，等等。 \tag{2.44}$$

泡利原理要求总的质子波函数 Ψ (1，2，3)在1，2，3的置换下是完全反对称的。因此，$\Psi(1,2,3)$可以通过把形式为 $\psi_\lambda(1)\psi_\lambda(2)\psi_\lambda(3)$的那些项的线性组合反对称化来得到，线性组合的形式由么正对称性和自旋决定。要求 Ψ 是一个色单态，我们可以写成

$$\Psi(1,\ 2,\ 3)=\left[\sum_p \delta_p P_{123} r(1) y(2) g(3)\right] R(1) R(2) R(3) \cdot \Phi(1,\ 2,\ 3), \tag{2.45}$$

式中 P_{123} 是1，2，3的一种置换，而 σ_p是这个置换相应的正、负号。味-自旋波函数 $\Phi(1，2，3)$必须是对1，2，3为完全对称的，并取其为：

$$\Phi(1,\ 2,\ 3)=\sum_p P_{123} u_\uparrow(1)[u_\uparrow(2) d_\downarrow(3)-d_\uparrow(2) u_\downarrow(3)]. \tag{2.46}$$

这一选择是唯一的：为使质子是 $\underline{8}$ 的一个成员，在 $[SU(3)]_{味}$ 变换下，它必须对于 u-d 对之一是反对称的。而三个自旋也必须象上式那样组合才能给出总自旋为 1/2。于是，全部对称化的结果自动地使质子成为 $SU(6)$的$\underline{56}$的一个成员。当然，这是泡利原理的一个结果，并且假设了所有的夸克都处在同一个空间轨道上。写出(2.46)式中的所有的项，我们得到

$$\begin{aligned}\Phi(1,\ 2,\ 3)= & 2 u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow+2 u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow+2 d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow \\ & -u_\uparrow d_\uparrow u_\downarrow-u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow-u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow \\ & -d_\uparrow u_\uparrow u_\downarrow-u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow-d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow,\end{aligned} \tag{2.47}$$

其中每一项的坐标都认为是以1，2，3的同样顺序排列的。

作为另一个例子，在这同样的模型中 π^+ 波函数由下式给出

$$\pi^{+}(1,2)=\left[\overline{r}(1)r(2)+\overline{y}(1)y(2)+\overline{g}(1)g(2)\right]$$

$$\cdot\left[\overline{d}_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2)-\overline{d}_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)\right]. \tag{2.48}$$

2.5 电磁和弱探针

如果假设强子是由夸克组成的，那么，强子的电磁相互作用和弱相互作用就应当从这些夸克的电磁和弱相互作用推导出来。这就是说，基本的电磁流和弱流应当是夸克流。因此，电子和中微子就能够分别通过它们的电磁相互作用和弱相互作用"看到"强子内的夸克。事实上，电子和中微子被核子散射的实验结果是与这样的解释相符的，它们提供了夸克是动力学客体的间接证据。然而，由于我们并不真正知道如何进行包含夸克的动力学计算，所以这些实验的解释必然是基于一些直观的模型而得到的，它们只是似乎合理的而不是决定性的结论。

1. 电磁相互作用

夸克图象假设强子的电磁相互作用起源于夸克的电磁相互作用。于是电磁相互作用的拉氏密度可写成

$$\mathscr{L}_{em}=-eA^{\mu}(x)[J_{\mu}(x)+j_{\mu}(x)], \tag{2.49}$$

其中 $A^{\mu}(x)$ 是麦克斯韦场，e 是电子电荷大小$\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}=\frac{1}{137}\right)$，$j_{\mu}(x)$ 是通常的电子和 μ 子的狄拉克流。夸克的电磁流由

$$J_{\mu}(x)=\overline{q}_{in}(x)Q_{ij}\gamma_{\mu}q_{jn}(x)$$

$$=\frac{2}{3}\overline{u}_{n}\gamma_{\mu}u_{n}-\frac{1}{3}\overline{d}_{n}\gamma_{\mu}d_{n}-\frac{1}{3}\overline{s}_{n}\gamma_{\mu}s_{n} \tag{2.50}$$

给出，式中色指标 n 要从 1 到 3 求和，而 Q_{ij} 是由(2.33)式给出的电荷矩阵。由于光子直接与夸克耦合，人们或许可以用一种"X射线"给强子透视来看到这些夸克，利用中子作为探针的同样的技术曾用于研究非常低的温度下液氦中的原子的动量分布[6]。

考虑单举 (inclusive) 电子-质子散射

$$e+p\longrightarrow e+X \tag{2.51}$$

其中 X 是任何粒子。这个过程的矩阵元可以用图 2.6 中的费曼图来表示。用 ν 代表在实验室系中的电子能量丢失。q_μ 表示被虚光子所携带的 4-动量转移。其平方质量是负值：$q^2<0$。对于 ν 的洛仑兹不变表达式为

$$\nu=P\cdot q/M \tag{2.52}$$

式中 P_μ 是质子 4-动量，M 是质子质量。我们所感兴趣的运动学区域是所谓的深度非弹极限 (deep-inelastic limit)：

$$\begin{aligned}&\nu\to\infty,\\&-q^2\to\infty,\\&x\equiv-q^2/2M\nu\ (\text{固定的}),\\&\qquad(0\leqslant x\leqslant 1).\end{aligned} \tag{2.53}$$

图 2.6 中所定义的矩阵元为

$$\mathcal{M}=\left[u(k')(-ie\gamma^\mu)u(k)\right]\frac{(-ie)}{q^2}\langle X|J_\mu|P\rangle, \tag{2.54}$$

式中 $J_\mu\equiv J_\mu(0)$，电子和质子态被协变地归一为每单位体积有 E/m 个粒子。实验室系的微分截面为：

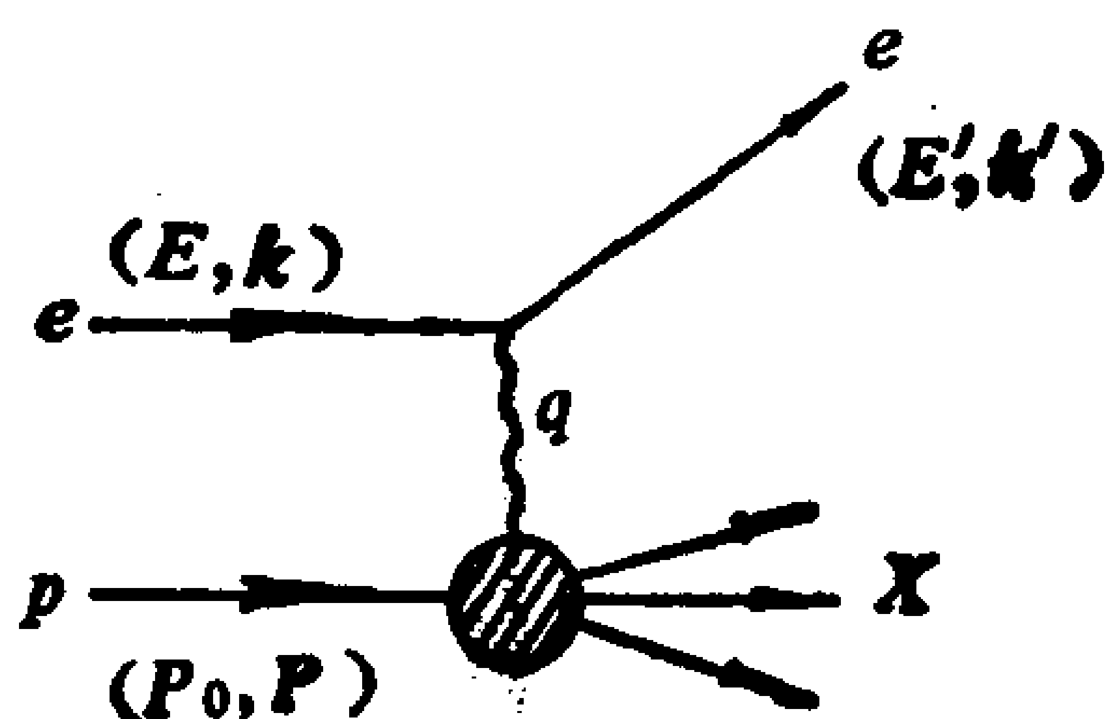
$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega}=\frac{4\alpha^2M^2}{q^4}\frac{E'}{E}I^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta} \tag{2.55}$$

式中 $\alpha=e^2/4\pi\hbar c$，$d\Omega$ 是观察到终态电子的立体角。张量 $I^{\alpha\beta}$来自于对电子自旋求平均：

$$I^{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{2}\mathrm{T_r}\left[\gamma^\alpha\frac{\not{K}'+m_e}{2m_e}\gamma^\beta\frac{\not{K}+m_e}{2m_e}\right]$$

(2.56)

$$\approx \frac{1}{2m_e^2}\left[k'^{\alpha}k^{\beta}+k^{\alpha}k'^{\beta}+g^{\alpha\beta}(m_e^2-k'\cdot k)\right] \tag{2.56}$$



矩阵元
$=(2\pi)^4\delta^4(P_X-q-P)qm$

$E=(K^2+m_e^2)^{1/2}$
$P_0=(P^2+M^2)^{1/2}$
$\nu=E-E'$在实验坐标
$=P\cdot q/M$

深度非弹极限：
$\nu\to\infty$
$-q^2\to\infty$
$x=-\dfrac{q^2}{2M\nu}$ 固定的
$(0\leqslant x\leqslant 1)$。

图 2.6 电子-质子深度非弹性散射的运动学

强子的结构完全包括在下列张量内：

$$W_{\alpha\beta}\equiv(2\pi)^3\sum_X\langle P|J_\alpha|X\rangle\langle X|J_\beta|P\rangle\delta^4(P_X-P-q). \tag{2.57}$$

洛仑兹不变性和规范不变性意味着 $W_{\alpha\beta}$ 能够用两个洛仑兹不变的形状因子 W_1 和 W_2 来表示：

$$W_{\alpha\beta}=-W_1\left(g_{\alpha\beta}-\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}\right)+\frac{W_2}{M^2}\left(P_\alpha-q_\alpha\frac{q\cdot P}{q^2}\right)\left(P_\beta-q_\beta\frac{q\cdot P}{q^2}\right) \tag{2.58}$$

如果 $W_{\alpha\beta}$ 已知，我们就可以用下式求出 W_1 和 W_2：

$$W_1=\frac{1}{2}\left[C_2-\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)C_1\right]\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)^{-1},\ C_1\equiv W^\alpha_\alpha,$$

(2.59)

$$W_2=\frac{1}{2}\left[3C_2-\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)C_1\right]\left(1-\frac{\nu^2}{q^2}\right)^{-1},\ C_2\equiv\frac{P^\alpha P^\beta}{M^2}W_{\alpha\beta}.$$

在深度非弹极限下

$$W_1 \approx -\frac{1}{2}C_1 + \frac{Mx}{\nu}C_2,$$

$$W_2 \approx \frac{Mx}{\nu}\left(-C_1 + \frac{6Mx}{\nu}C_2\right). \tag{2.60}$$

经过一些代数运算，我们可以把实验室系的微分截面（2.55）式表示成如下形式：

$$\frac{d\sigma}{dq^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E}\left(W_2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2W_1\sin^2\frac{\theta}{2}\right), \tag{2.61}$$

式中 θ 是实验室中的散射角，其中电子的质量已经被略去了。主要的实验结果[7]表明 $W_1 \neq 0$，W_2 具有标度性质，使得在深度非弹极限下 νW_2 只是 x 的函数。我们将证明，上述这些结果表明质子是由自旋为$\frac{1}{2}$的、对光子而言是类点的（point-like）客体所组成的。

2．部分子模型（parton model）

我们没有任何从第一原理出发计算 $W_{\alpha\beta}$ 的方法，因为还没有一种理论能把态 $|P>$和 $|X>$表示成流 J_α 中出现的夸克场。然而，对此费曼曾提出了一种简单且直观的模型，即“部分子模型”，现在我们就来描述它[8]，[9]。

假设质子是由一些束缚在其内部的、对光子而言似乎是类点的客体所组成。于是，质子就可能以由这些自由客体组成的瞬时虚态的形式存在。虚态的寿命反比于其能量与质子能量之差。在一个质子在其中以任意高的速度运动的洛仑兹参考系中，相对论的时间延缓效应可使这一寿命任意地延长。我们称这样的参考系为一个**无穷动量参考系**（∞-momentum frame），把它看作是由一些洛仑兹参考系组成的序列的极限。在这样的参考系中，入射到质子上的一个光子就会看到一群自由的点电荷，费曼把它们

叫做“部分子”（因为它们是在无穷动量参考系中定义的，这些部分子在质子静止参考系中并不一定有意义）．现在可以想象光子被其中的一个部分子所吸收．吸收过程延续的时间是光子能量的量级，可以通过在实验中选择 ν 而控制．在实验室中，原则上我们想让 ν 多大都可以，结果使特征时间 ν^{-1} 可以随我们意愿而减小．然而，当我们变到无穷动量参考系时，这个时间也要延缓，一个部分子是否能生存足够长的时间以致象一个自由粒子那样吸收光子，那就不清楚了．更详细的基本考虑（我们在这里不再讨论）表明，当深度非弹性散射的运动学条件（2.53）被满足，且 $x>0$ 时，部分子的寿命的确要比吸收时间长．

若接受上述图象，我们就可以按如下办法来计算 $W_{\alpha\beta}$．矩阵元 $\langle X|J_\beta|P\rangle$ 描写一个部分子吸收一个光子．我们假设，吸收过程持续的时间相对而言是如此之短，以致 $|P\rangle$ 和 $|X\rangle$ 都可以看成自由的部分子态．在乘积 $\langle P|J_\alpha|X\rangle\langle X|J_\beta|P\rangle$ 中，光子先被吸收，然后又被重新发射．我们假设这两个过程只涉及同样的一个部分子（如果涉及两个不同的部分子，则必需的动量关联就会意味着其中必有一个部分子在与光子相互作用之前就有了很高的能量，我们认为这是极不可能的）．所以，如图 2.7 所示，

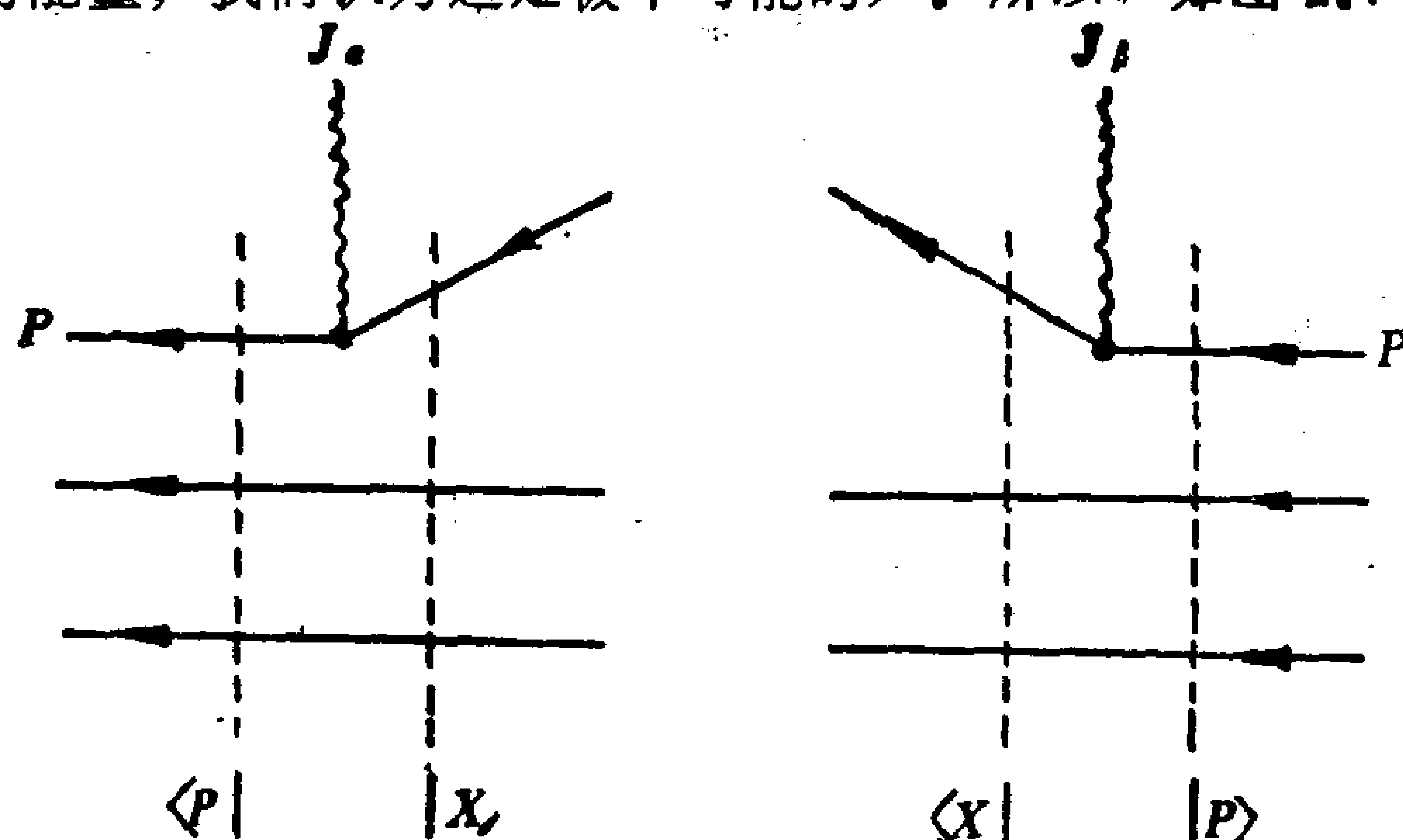


图2.7　同一个部分子吸收并再发射光子，而其它部分子只是旁观者．

每个部分子对 $W_{\alpha\beta}$ 单独作出贡献，而这一贡献是可加的。

在无穷动量参考系中，所有的质量都可以忽略。因此，我们取部分子为无质量的狄拉克粒子，其波函数协变地归一到每单位体积内 $2p_0$ 个粒子。于是，一个部分子对 $W_{\alpha\beta}$的贡献为

$$\widetilde{W}_{\alpha\beta}\equiv(2\pi)^3\frac{1}{2}\sum_{\text{自旋}}\sum_{p'}<p|\,J_\alpha|\,p'><p'|\,J_\beta\,|p>\delta^4(p'-p-q)$$

$$=Q^2\int\frac{d^3p}{2p_0'}\delta^4(p'-p-q)\frac{1}{2}T_r(\gamma_\alpha\not{p}'\gamma_\beta\not{p}) \tag{2.62}$$

$$=Q^2\delta\left(p\cdot q+\frac{1}{2}q^2\right)(2p_\alpha p_\beta+q_\alpha p_\beta+q_\beta p_\alpha-g_{\alpha\beta}q\cdot p),$$

式中 p^α 是部分子的 4- 动量，Q 是以 e 为单位的电荷。设

$$p^\alpha=yP^\alpha\quad(0\leqslant y\leqslant 1) \tag{2.63}$$

这就是说，假定所有的横动量都可以忽略，且没有任何一个部分子与质子的运动方向相反。于是，利用（2.60）式我们求得一个部分子对 W_1 和 W_2 的贡献为

$$\nu\widetilde{W}_2=2Q^2Mx^2\delta(y-x),$$

$$\widetilde{W}_1=\nu\widetilde{W}_2/2Mx. \tag{2.64}$$

假设质子态所包含的第 i 类部分子态在 dy间隔内有 $f_i(y)dy$ 个，则

$$W_{1,2}=\sum_i\int_0^1 dyf_i(y)\widetilde{W}_{1,2} \tag{2.65}$$

问题是如何把 $f_i(y)$归一呢？按照我们的约定，一个部分子态每单位体积有 $2p_0$ 个部分子，而一个质子态每单位体积有 P_0/M 个质子。所以，在一个质子里面，间隔为 dy 内的第 i 类部分子的数目是 $f_i(y)dy$ 乘以$2p_0/(P_0/M)=2My$ 个，即

$$n_i(y)dy=2Myf_i(y)dy. \tag{2.66}$$

由（2.63）式知，$n_i(y)$必须满足条件：

$$\sum_i\int_0^1 dyyn_i(y)=1. \tag{2.67}$$

利用这一归一化的部分子的分布函数，（2.64）式则变成

$$\nu W_2 = \sum_i Q_i{}^2 x n_i(x),$$

$$W_1 = \nu W_2 / 2Mx. \tag{2.68}$$

可见，νW_2 有着所需的标度性质。假如我们用的是自旋为 0 的部分子，那么我们就会得到 $W_1 = 0$（虽然 W_2 还会是相同的）。因此，自旋$\frac{1}{2}$的部分子模型是与实验相符的，从而我们可以认为部分子就是夸克或者反夸克。实验表明，$n_i(x) \xrightarrow[x \to 0]{} x^{-1}$。因此部分子的总数为无穷大。这样，正如高能光子所看到的那样，质子是由三个夸克加上由无穷多的夸克-反夸克对形成的“海”所构成的。

3. 色的证据

夸克具有色的最直接的实验证据是来自对撞实验中电子-正电子湮灭总截面的测量。其结果用截面的比

$$R \equiv \frac{e^+e^- \to \text{强子}}{e^+e^- \to \mu^+\mu^-}, \tag{2.69}$$

来表示，质心能量直到 35.8 GeV 的所有的数据如图 2.8 所示[10]，[11]。注意，象$\tau^+\tau^-$这样的重轻子终态已经被包括在内了，因为它们也衰变成强子。而终态 e^+e^- 和 $\mu^+\mu^-$ 没有包括在内。

这些数据的总的特征可以这样来理解。反应主要是通过初态湮灭成单个的虚光子而发生，然后，这个虚光子通过产生轻子对和夸克对（因为它们是唯一直接与光子耦合的粒子）而物质化为终态。总截面应当正比于除去共振态和终态的相互作用之外，从能量上可以成对产生的所有的轻子与夸克的电荷平方和。可能的共振态都可以独立地被识别，如果我们愿意的话就可以把它们减

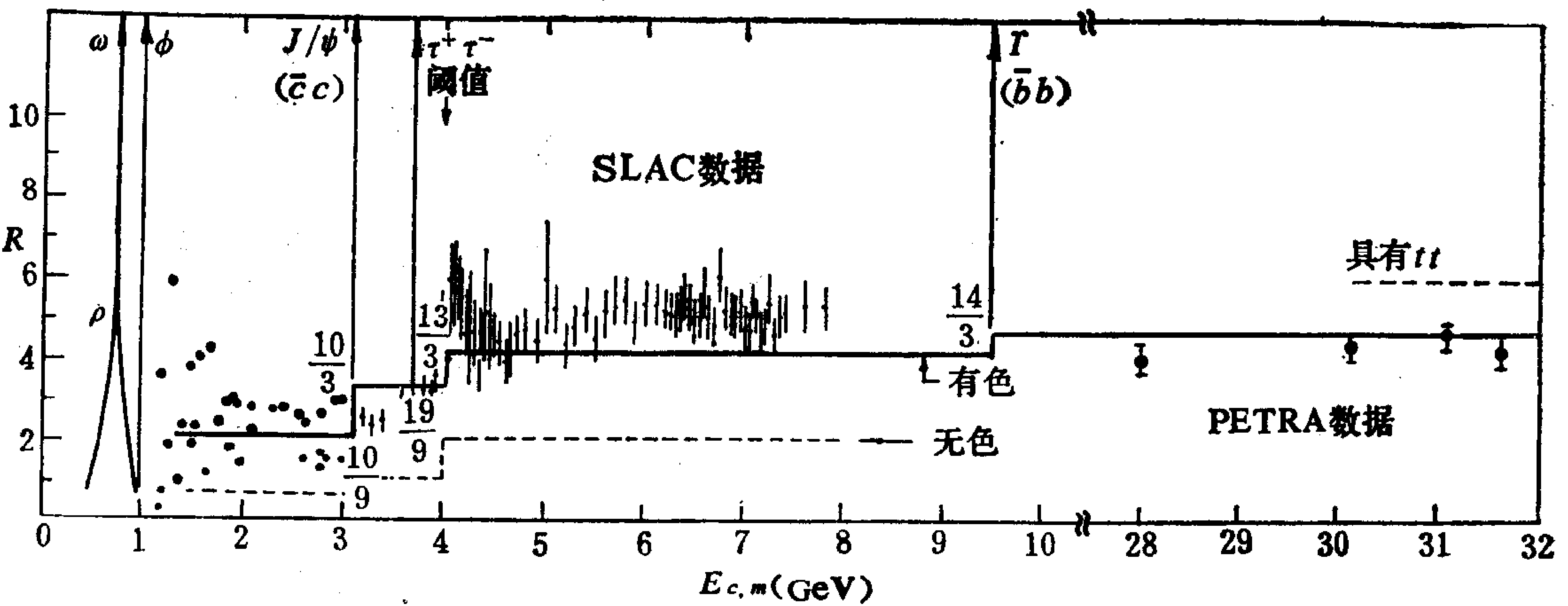


图 2.8 比率 $R=(e^+e^-\to 强子)/(e^+e^-\to\mu^+\mu^-)$

SLAC 和 PETRA 的数据有着不同的系统误差，图上没有标出．3 GeV 以下的各点误差线也很大，为了清楚起见都有省略了．28 GeV 以上的那些点只是取样数据．

除掉。只要产生这些共振态的各个阈值是明显隔开的，在阈和阈之间就应当有一段平台，在这段范围内终态的相互作用相对而言与能量无关。在各个平台上的电荷平方和都在表 2.9 中给出，其中区分了带色与不带色的两种情况。

表 2.9 比率 R 值

$e^+e^-\to Q\bar{Q}$	u	d	s	c	τ^-	b	(?) …
	$\bar{u}$	$\bar{d}$	$\bar{s}$	$\bar{c}$	τ^+	$\bar{b}$	…
Q^2	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$		$\frac{1}{9}$	
		2/3					
无色			10/9				
3×			10/3				
有色				13/3			

在图 2.8 上把这些平台的值与实验数据画在了一起，它表明对于带色的预言显然是有利的。在由 $\overline{b}b$ 产生阈 9 GeV 左右直到实验的最高能量 35.8 GeV 的很宽的能量范围内没有任何新的阈值产生，这就给新的轻子或夸克质量确定了一个下限为 18 GeV/c^2。

如果强子终态确实是由夸克对产生的，那么它们的角分布就可能保留下夸克对初始方向的痕迹。在"夸克喷注"现象中[12]，人们已经发现情况正是如此。如果象我们所相信的那样，色对称性是引起强相互作用的一种规范对称性，那么还可能有规范玻色子（胶子）从夸克发射出来，结果会形成三个或更多个强子喷注，它们有不同的特征（因为胶子不参加电磁相互作用）。这种

现象也已经被观测到了[13]。

4. 弱相互作用[14]

我们目前关于弱相互作用的知识可以简单概括地由相互作用拉氏密度

$$\mathscr{L}_{\mathrm{wk}} = gW_a(x)[J^a_{\mathrm{wk}}(x) + j^a_{\mathrm{wk}}(x)] + h.c. \tag{2.70}$$

给出，式中 $J^a_{\mathrm{wk}}(x)$ 是夸克弱流，$j^a_{\mathrm{wk}}(x)$ 是轻子弱流。从现在起，为简洁起见，我们将把下标 wk 省略。这些弱流与一个有质量的带电的矢量场 $W_a(x)$ 相耦合。尽管 W 介子还没有在实验上观测到[译者注]，假定它们存在仍是有用的。

弱流由下式给出

$$\begin{aligned} j^a &= \overline{e}\gamma^a(1-\gamma_5)\nu + \overline{\mu}\gamma^a(1-\gamma_5)\nu', \\ J^a &= [\overline{d}\gamma^a(1-\gamma_5)u]\cos\theta + [\overline{s}\gamma^a(1-\gamma_5)u]\sin\theta, \end{aligned} \tag{2.71}$$

式中 e 和 ν 分别代表电子和电子中微子的狄拉克场算符；μ 和 ν' 分别代表负 μ 子和 μ 中微子的狄拉克场算符。θ 角称为卡比玻角，其实验值为 $\theta \cong 1/4$。

矩阵 $1-\gamma_5$ 作用在狄拉克旋量上取出了它的手征性为左手的分量。对于一个无质量的狄拉克粒子或一个有质量但动量相当大的狄拉克粒子，这意味着负的螺旋性（即自旋方向与其动量方向相反）。我们注意到对任何狄拉克旋量 ψ：

$$\overline{\psi}\gamma^a(1-\gamma_5)\psi = \overline{\psi}(1+\gamma_5)\gamma^a\psi = [(1-\gamma_5)\psi]^+\gamma_0\gamma^a\psi. \tag{2.72}$$

于是，弱流中只包含左手旋量。这些流给出四种基本的费曼顶点，如图 2.9 所示。μ^- 介子的衰变相应于图 2.10 中的费曼图。

由于在低能过程中 W 介子的动量很小，它的传播子可以取为 m_W^{-2}。于是我们得到耦合常数 g 和实验上测得的费米耦合常数 G 之间的如下的关系式：

[译者注]：见 159 页译者注。

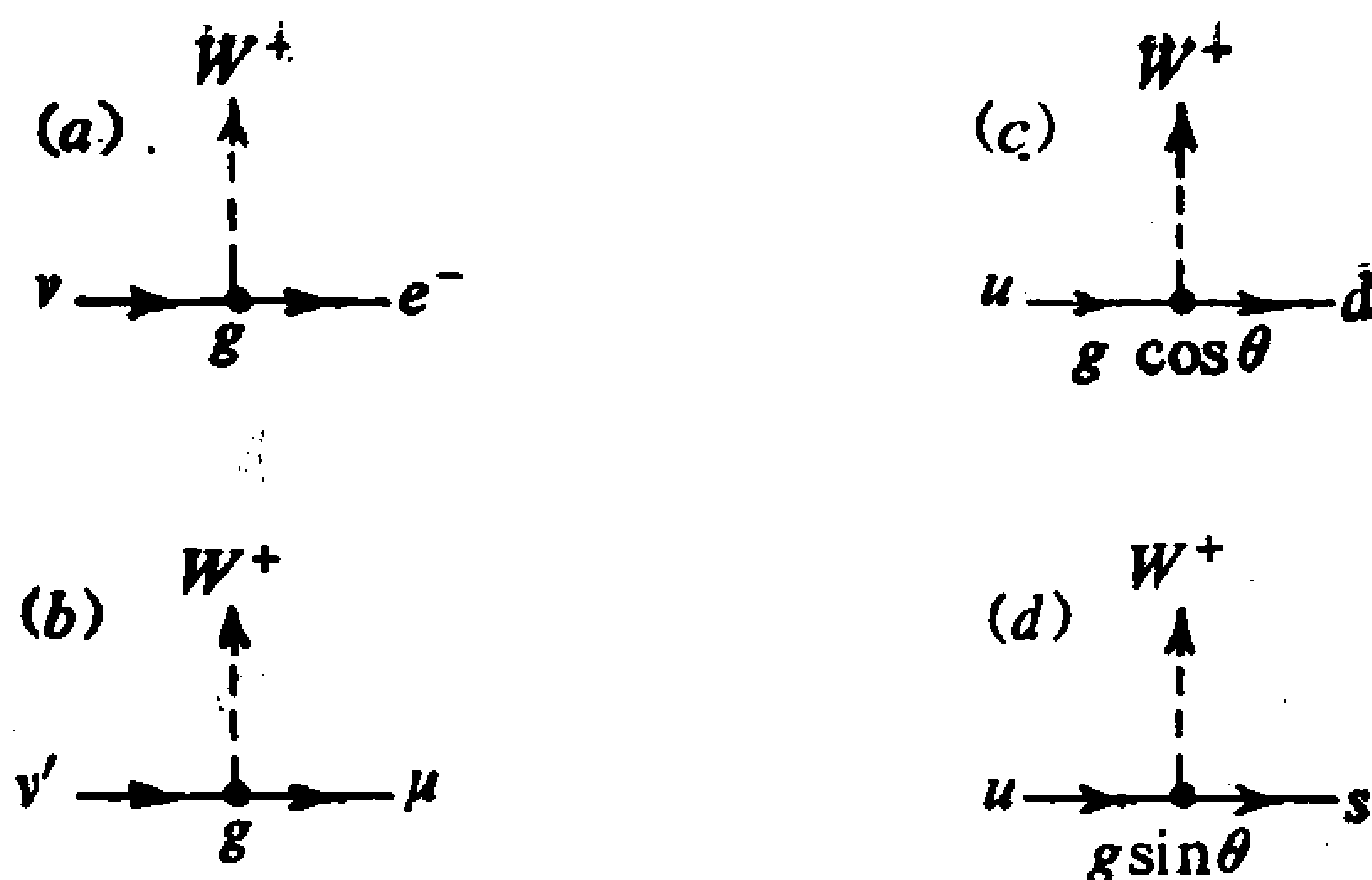


图 2.9　弱作用顶点

$$g^2/m_W^2 = G/\sqrt{2},$$
$$G = 1.01\times10^{-5}m_p^{-2}, \tag{2.73}$$

其中 m_p 是质子质量。

强子的弱衰变是通过图 2.9 中的夸克顶点 (c) 和 (d) 发生的。在最低级近似 $m_p^2G(\approx10^{-5})$ 下，由这些顶点的结构立即可以得出下列由实验已确立的强子衰变的选择定则：

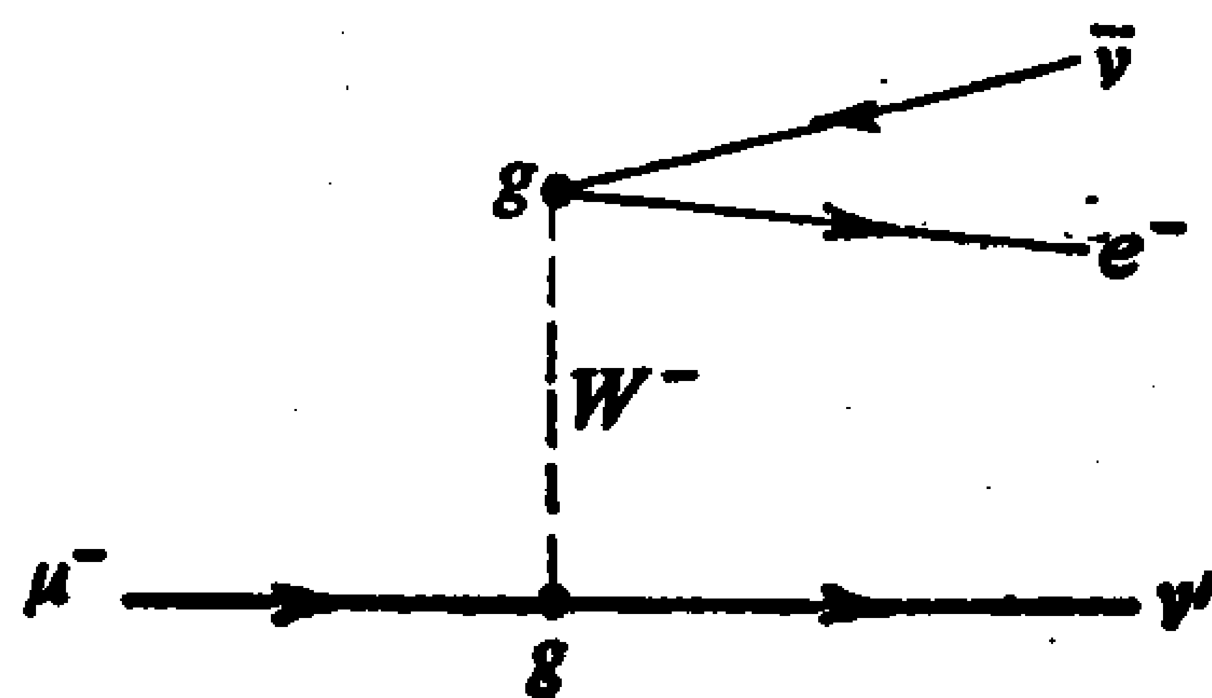


图 2.10　μ^-衰变

(a) 强子奇异数的改变其大小不超过 1，即 $\Delta S=0,\ \pm1$。

(b) 当终态有轻子而且 $\Delta S=\pm1$ 时，强子电荷的改变等于它的奇异数的改变，即 $\Delta Q=\Delta S=\pm1$。

(c) 当强子的奇异数不改变时，它的同位旋的改变是 $\pm\frac{1}{2}$，即 $|\Delta \boldsymbol{I}|=\frac{1}{2}$（但是，这一规则受到电磁相互作用的破坏，实际上只是在量级为 $\alpha\sim1\%$ 的范围内成立）。

图 2.11 中画出了一些强子弱衰变的费曼图，图中划上阴影线部分代表强相互作用。

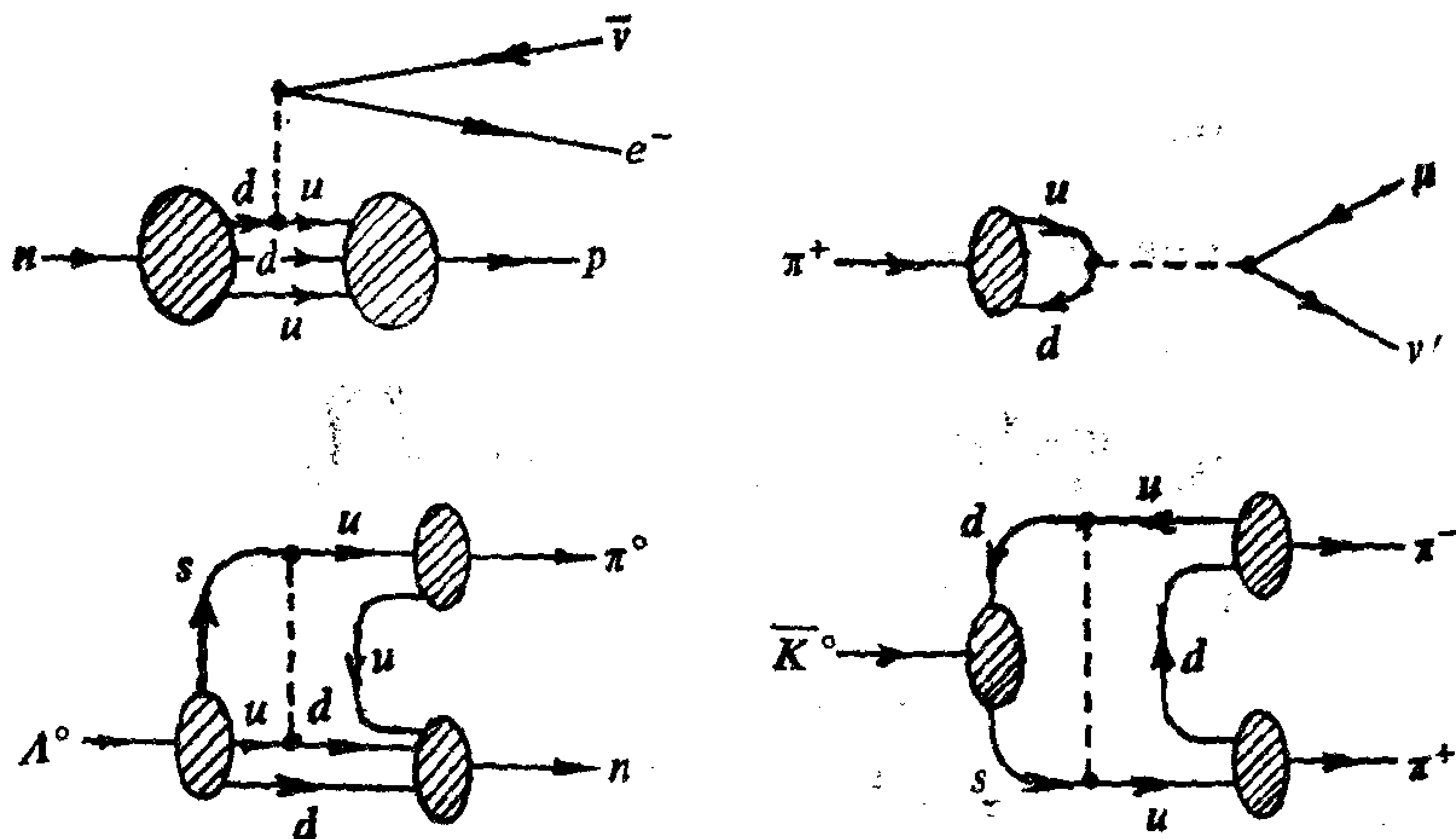


图 2.11 强子的弱衰变

我们记起夸克(u,d)组成一个同位旋二重态，而s组成一个同位旋单态。夸克流的矢量部分可写成如下形式

$$V^a \equiv g\cos\theta(\overline{u}\,\overline{d})\gamma^a\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix} = \sqrt{2}\,g\cos\theta(\overline{q}\,\gamma^a I_+ q), \tag{2.74}$$

式中$I_+=(I_1+iI_2)/\sqrt{2}$为同位旋的升算符。这个式子是费曼和盖尔曼的“守恒矢量流假说”（CVC）的一种简洁的表述（以一种由于引入卡比玻角而修改了的形式，它是由实验所要求的）。由于强相互作用保持同位旋守恒，当V^a夹在两个强子态之间时，其中的耦合常数g不受强相互作用重整化效应的影响。另一方面，这个流的轴矢量部分前面的耦合常数却要受到这些效应的影响而改变（实验上，对核子态有一个因子 1.25）。

由上述可见，夸克假设把弱相互作用的结构整理得有条有理。它简洁地总结出选择定则，而且把弱效应从强相互作用中分解出来。

同电磁相互作用的情况类似，我们可以通过中微子被核子的深度非弹性散射来探测强子的结构，从而再一次检验部分子的想法。对这种情况的分析研究要比电磁相互作用复杂得多，因为这时不再有规范不变性，而且中微子和反中微子有着确定的但相反的螺旋性。我们不再讨论这种情况。实验上得到的数据是与简单的部分子图象的预言相符的[15]。

2.6 粲

1. 粲夸克

格拉肖、依里奥普鲁斯（Iliopoulos）和马亚尼（Maiani）[16]（GIM）提出，除了 u、d、s 之外，还应当有另一种味夸克，他们称之为“粲”（charm）（c）。他们的动机是使旧理论去除那些不希望有的更高阶弱效应，即对 ΔS 和 $\Delta S=\Delta Q$ 规则的破坏，同时也使其避免那些如 $\overline{K^0}\to\mu^++\mu^-$ 这样的未被观察到的弱衰变，它们可以通过等效中性流而发生，但实验上却没有观测到。以 J/ψ 为开端的新强子家族的相继发现，看来已经独立地而且漂亮地证实了他们的猜测。依照他们的方案，在夸克和轻子之间表现出惊人的一一对应关系。

实验上，没有观测到 $\overline{K^0}\to\mu^++\mu^-$ 的衰变模式，它的分支比小于 10^{-8}。在三种味夸克的理论中，这种衰变模式通过图 2.12 所示的费曼图发生，量级为 g^4，矩阵元是发散的。

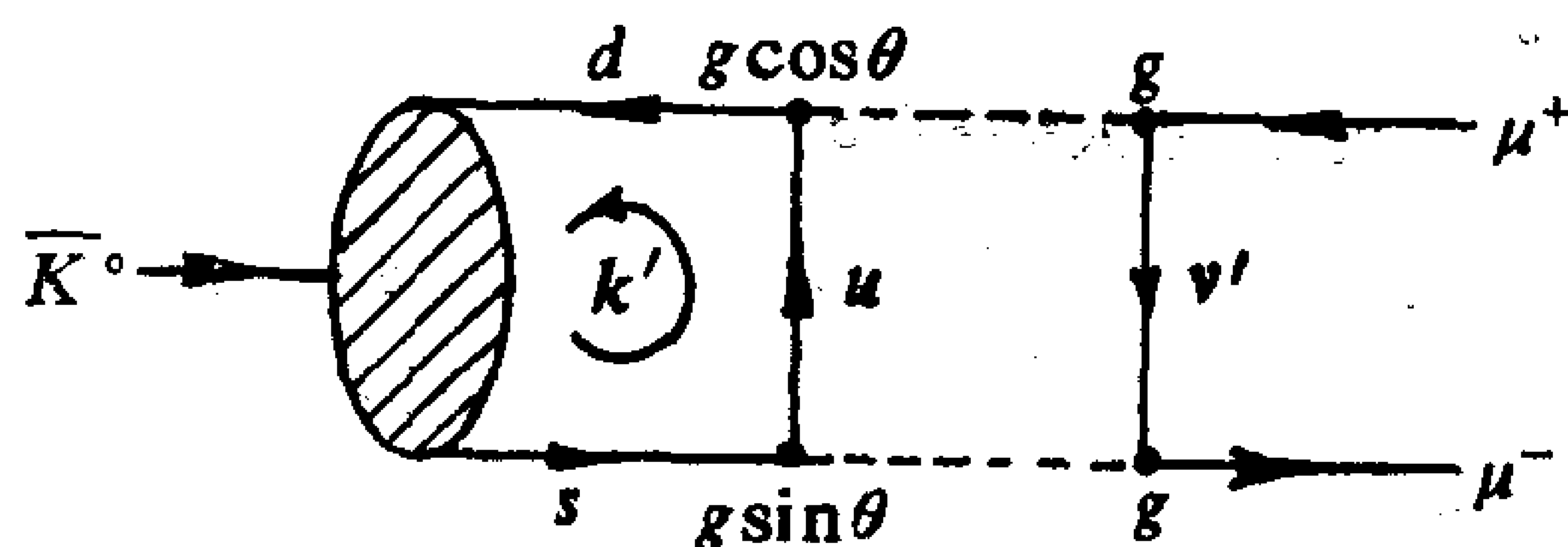


图 2.12　实验上没有观测的衰变模式 $\overline{K^0}\to\mu^++\mu^-$ 的最低阶矩阵元

虽然通过加进其它一些场并精心推敲可以使这种理论成为可重整的（例如温伯格-萨拉姆模型），但为了定性地讨论，我们仍维持目前的这一模型，只不过要引入一个截断因子(cutoff) Λ. 取 W 介子的传播子为

$$\Delta^{\alpha\beta}(k)=\frac{1}{k^2-m_W^2}\left(g^{\alpha\beta}+\frac{k^\alpha k^\beta}{m_W^2}\right), \tag{2.75}$$

并且假定由于有强相互作用，图 2.12 中对动量 k' 的积分收敛，则通过简单的幂次计算可知这个图的发散度是 $g^4\Lambda^2\sim G^2\Lambda^2$. 为使分支比保持在实验的上限之内，必须使截断因子 $\Lambda\leqslant3\text{GeV}$，这个值太小，似乎不大合理。不管怎样，从理论观点看，通过动力学机制而不是靠截断因子来压低这个衰变似乎总是更令人满意，引入截断因子的做法只不过是承认在这个模型中对问题不去做出解释而已。

GIM 的建议是引入一个新的夸克 c，适当选择它的弱耦合使得在夸克质量完全简并的极限下恰好把图 2.12 的费曼图抵消。所需的耦合如图 2.13 所示。

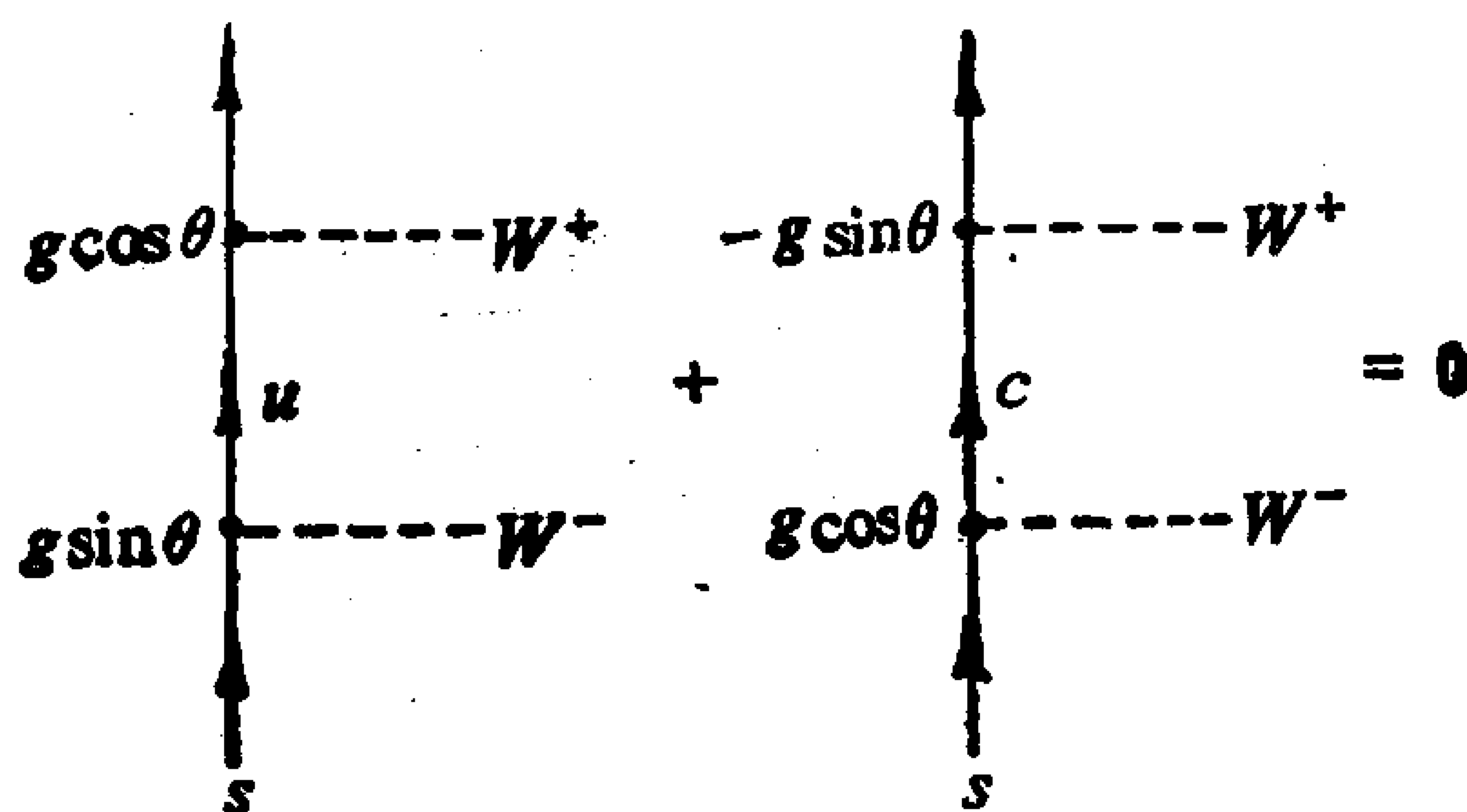


图 2.13 引入粲夸克 c

在真实世界中，么正对称性是不严格的，s 夸克应当具有与 u、d 夸克不同的质量。据猜测，c 夸克也有不同于它们的质量，于是 c-u 质量差将使图 2.13 中的相消成为不完全的。为了计算 $\overline{K^0}\to\mu^++\mu^-$ 的真正衰变几率，要把各种不同的因素都包括进去。

为了赋予夸克质量以真实的意义，就必须有一种夸克束缚态的模型。为了对更高阶弱过程进行有意义的计算，还必须用一种可重整的弱相互作用理论。然而，作为粗略的猜测，可以预期用某种等效方式定义的 c-u 质量差应取代截断因子 Λ。因此，早期引用的实验范围都把这个质量差取为 $\lesssim 3\mathrm{GeV}/c^2$。

u、d、s 三种味引进来是要实现 $[SU(3)]_{味}$。又添加了一种味意味着要把这个群扩大成 $[SU(4)]_{味}$，它比 $SU(3)$ 破坏得还要厉害。正象从 $SU(2)$ 到 $SU(3)$ 时我们引入了一个新的强子量子数超荷一样，现在也要引入另一个强子的量子数——粲数（C）。象 Y 一样，假定它是一个在强相互作用下守恒的可加的量子数。根据定义，规定粲夸克的 $C=1$，而 u、d、s 的 $C=0$。还假定，粲夸克有着象其它那些夸克一样的三种色。

由图 2.13 中包含 c 的顶点的结构所启发，粲夸克 c 的其它一些量子数规定如下：

自旋： $s=1/2$ 为使角动量守恒，

同位旋：$I=0$ 因为只有一种 c。

电荷： $Q=\dfrac{2}{3}$ 为使电荷守恒。

重子数：$B=1/3$ 为使重子数守恒。

奇异数 $S=-1$ 为保持 ΔS 和 $\Delta S=\Delta Q$ 规则。

超荷 $Y\equiv B+S=-2/3$。

按照这些规定，我们有推广的关系式

$$Q=I_3+\frac{1}{2}Y+C. \tag{2.76}$$

2. J/Ψ 和它的家族

1974 年，丁肇中和里希特（Richter）分别领导的实验小组，各自独立地发现了 J/Ψ 粒子[17]。这个粒子引起人们注意的地方在于它的质量（$3.1\ \mathrm{GeV}/c^2$）是质子质量的三倍多，但其寿命（总

宽度＝67KeV）却比我们熟悉的那些强子长千倍。用丁肇中的话来说："好象偶然碰到了一个村庄，那里的人能活一万年。"[18] 从那时起，又发现了同一家族的一些其它粒子，即：$\psi(3684)$、$\psi(3950)$、ψ（4150）和ψ（4400）。所有这些粒子都是自旋为1的介子，它们的同位旋 $I=0$，有负的宇称和 G 宇称。

现在已经认定这些粒子都是"粲子素"（charmonium）态，即$\bar{c}c$的束缚态。J/Ψ 是粲子素的基态。采用非相对论独立夸克模型，认为c和$\bar{c}$之间的位势为线性势，并取c的质量约为J粒子质量的一半即1.5GeV（于是使非相对论假设自洽），则可以解释 J/Ψ 家族。质量比较高的那些Ψ态都假定是径向激发态，按照这一模型，还应当有轨道激发态，这些也已被实验证实了。粲介子和粲重子，即诸如（$c\bar{d}$）和（cud）之类的束缚态也已发现。但 J/Ψ 的宽度异乎寻常的窄尚未能完全理解。人们认为它有着动力学的起因。

一个新的矢量介子家族，即Υ家族，其质量由9 GeV/c^2开始，后来也被发现了，它提供了新的一种味的夸克，即b夸克的证据[19]。

于是，有了一个丰富的新重夸克谱，它形成了一个独立的研究课题，在此我们不准备详细讨论[20]。我们的目的只是通过夸克模型阐明新粒子的这种谱，以便为夸克的真实性提供强有力的证据。

3. 夸克与轻子间的对应

由于引入了粲夸克，（2.71）式中的夸克弱流就要修改成

$$J^a = (\bar{d}\cos\theta + \bar{s}\sin\theta)\gamma^a(1-\gamma_5)u + (\bar{s}\cos\theta - \bar{d}\sin\theta)\gamma^a(1-\gamma_5)c \qquad (2.77)$$

显然，对于强相互作用守恒的量子数而定义的夸克对(d,s)，以线性重新组合（d_θ,s_θ）的形式参与弱相互作用，后者恰为前者

转动一个卡比玻角：

$$\begin{pmatrix} d_\theta \\ s_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}. \tag{2.78}$$

利用这一结果，夸克流和轻子流就有了非常类似的形式：

$$J^a = \overline{d_\theta}\,\gamma^a(1-\gamma_5)u + \overline{s_\theta}\,\gamma^a(1-\gamma_5)c,$$
$$j^a = \overline{e}\,\gamma^a(1-\gamma_5)\,\nu + \overline{\mu}\,\gamma^a(1-\gamma_5)\nu'. \tag{2.79}$$

τ 和 b 发现之后，倘若人们再假设有 τ 中微子 ν'' 和另一个夸克味 t，则这种相似性仍可保持(这些将在第六章中讨论)．目前，我们对于这种对称性没有什么更深刻的理解．由它我们可以得到这样一种启示：轻子和夸克的味都是更深层次统一的表现形式．在现阶段，这些粒子对我们来说似乎是基本的，以后或许还能约化为某种更简单的东西．

参考文献

[1]请看 M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, *The Eightfold Way* (W. A. Benjamin, New York, 1964)．

[2]一般的请参考看 W. Miller, *Symmetry Groups and Their Applications* (Academic Press New York, 1972)．此书有中译本："对称性群及其应用"．(科学出版社)．

[3]一般的参考，请看 J. J. J. Kokkedee, *The Quark Model* (W. A. Benjamin, New York, 1969)．

[4]一般的参考，请看[3]中所列的书．

[5]关于色概念的评述可见 O. W. Greenberg and C. A. Nelson, *Physics Reports* 32c, 71 (1977)．

[6]K. Huang, in *Selected Topics in Physics, Astronomy and Biophysics*, A. Delaredo and N. Jurisic, eds., (Reidell Publishing Co., Dordrecht, Holland, 1973) PP. 175-213.

[7]J. I. Friedman and H. Kendall, *Ann.Rev.Nucl. Sci.*, 22, 203 (1972)．

[8]R. P. Feynman, *Phys, Rev. Lett.* 23, 1415 (1969).

[9]J. D. Bjoken and E. A. Paschos, *Phys. Rev.* 158, 1975 (1969).

[10]Particle Data Group, *Rev. Mod. Phys.* 52, 556 (1980).

[11]Mark-J Collaboration. *The First Year of Mark-J,* MIT Lab for Nucl. Sci. Report 107 (April. 1979).

[12]G. Hansen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 35, 1609 (1975).

[13]O. P. Barber *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 43, 830 (1979).

[14]一般的参考请看 R. E. Marshak, Riazuddin, and C. P.Ryan, *Theory of Weak Interactions in Particle Physics* (Wiley-Interscience, New York, 1969).

[15]G. B. West. *Phys. Reports* 18C, 263 (1975).

[16]S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, *Phys. Rev.* D2, 1285 (1970).

[17]丁肇中和里希特获诺贝尔奖的演讲. 见 S. C. C. Ting, *Rev. Mod. Phys.* 49, 236 (1977); B. Richter, Ibid, 49, 251 (1977).

[18]S. C. C. Ting (私人通信).

[19]S. W. Herb *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 39, 252 (1977).

[20]T. Appelquist, R. M. Barnett and K. D .Lane, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* 28, 387 (1978).

第三章　麦克斯韦场——U（1）规范理论

3.1　整体(global)规范不变性和定域(local)规范不变性

麦克斯韦场，或电磁场，只与物质场的守恒流耦合。这个性质可由规范原理推导出来。这就是说，电磁耦合起源于把“整体规范不变性”推广到“定域规范不变性”。

为阐明规范原理，我们以一个复标量场$\phi(x)$为例。在不存在电磁耦合时，它的经典拉格朗日密度[注a]为

$$\mathscr{L}_0(\phi(x),\partial^\mu\phi(x))=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-V(\phi^*\phi).\tag{3.1}$$

在$\phi(x)$做如下常数相因子的变化下：

$$\phi(x)\to U\phi(x),\ U=e^{-i\alpha},\tag{3.2}$$

其中α是一个任意的实常数，$\mathscr{L}_0$显然是不变的。变换(3.2)称为“整体规范变换”，而这一理论称为具有$U(1)$群整体规范不变性。根据诺特(Noether)定理[1]，存在一个守恒流

$$j^\mu=\text{常数}\cdot\phi^*\overleftrightarrow{\partial}^\mu\phi,\tag{3.3}$$

$$\partial_\mu j^\mu=0.$$

现在，我们考虑定域规范变换

$$\phi(x)\longrightarrow U(x)\phi(x),$$

$$U(x)=e^{-i\alpha(x)},\tag{3.4}$$

[注a] 这个理论是要量子化的。为了方便，我们采用经典理论。而只要可能，我们就用量子观点给出某些简单性质。

其中$\alpha(x)$是一个任意的实函数。这就是说，不同的时空点的规范变换彼此无关。我们注意到，在整体规范变换下，$\partial^\mu\phi(x)$和$\phi(x)$按相同的方式变换；但在定域规范变换下，由于

$$\partial^\mu\phi(x)\longrightarrow U(x)\partial^\mu\phi(x)+\phi(x)\partial^\mu U(x), \tag{3.5}$$

$\partial^\mu\phi(x)$比$\phi(x)$多了一项，因此，$\mathscr{L}_0(\phi,\partial^\mu\phi)$不是定域规范变换下的不变量。

为使该理论定域规范不变，我们必须用一个适当推广的量代替$\partial^\mu\phi(x)$，使这个新的量与$\phi(x)$的变换方式相同。我们定义一个称为"规范场"的矢量场$A^\mu(x)$，在定域规范变换(3.4)下，它按如下规则变换：

$$A^\mu(x)\longrightarrow A^\mu(x)+\frac{1}{e}\partial^\mu\alpha(x), \tag{3.6}$$

其中e是用来固定$A^\mu(x)$相对于$\phi(x)$的标度的一个给定的实数。接着，定义"协变微商"（covariant derivative）：

$$D^\mu\phi(x)\equiv[\partial^\mu+ieA^\mu(x)]\phi(x), \tag{3.7}$$

它将按照$\phi(x)$的变换方式变换

$$\begin{aligned}&D^\mu\phi(x)\longrightarrow U(x)D^\mu\phi(x),\\&[D^\mu\phi(x)]^*\longrightarrow U^*(x)[D^\mu\phi(x)]^*.\end{aligned} \tag{3.8}$$

用$D^\mu\phi$代替$\partial^\mu\phi$，我们得到一个新的拉格朗日密度$\mathscr{L}(\phi,D^\mu\phi)$。在定域规范变换下，它显然是不变的。然而，它包含有作为外场的$A^\mu(x)$。为了定义一个正则意义下的封闭的动力学体系，必须添加一个包含有$\partial^\nu A^\mu$二次项的项。这种类型的唯一规范不变的洛仑兹标量是和$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$成正比的，其中

$$F^{\mu\nu}(x)\equiv\partial^\mu A^\nu(x)-\partial^\nu A^\mu(x) \tag{3.9}$$

称为场强张量。这样一来，我们就得到了一个定域规范变换下封闭的力学体系的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\mathscr{L}_0(\phi,D^\mu\phi). \tag{3.10}$$

第一项中的因子$-\frac{1}{4}$纯属约定。现在，$U(1)$整体对称性被扩大成定域对称性，我们把这叫做“规范化”（“gauge”）[译者注]了。在正则场论形式中，这一手续是唯一的。由(3.10)得到的经典运动方程恰恰是标量电动力学的麦克斯韦方程：

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu,\\
&D_\mu D^\mu\phi=-\frac{\partial V}{\partial\phi^*},\\
&(D_\mu D^\mu\phi)^*=-\frac{\partial V}{\partial\phi},
\end{aligned}\tag{3.11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&j^\nu=ie[\phi^*D^\nu\phi-(D^\nu\phi)^*\phi]=ie\phi^*\overleftrightarrow{\partial}^\nu\phi-2e^2\phi^*\phi A^\nu,\\
&\partial_\nu j^\nu=0,
\end{aligned}\tag{3.12}
$$

上面最后一个等式是由运动方程和$F^{\mu\nu}$的反对称性所要求的。这样一来，我们就“推导”出了电磁学。

尽管对称性扩大了，却并没有产生任何附加的守恒流。应用诺特定理会得到一个显然的结果，即最一般的守恒流是$j^\mu(x)$加上一项$\partial_\nu[F^{\mu\nu}(x)f(x)]$，其中$f(x)$是一个任意的函数。规范原理只是确定了物质场与规范场之间的耦合形式。

若把定域规范变换（3.4）和（3.6）概括为

$$
\begin{aligned}
&\phi(x)\longrightarrow e^{-ie\omega(x)}\phi(x),\\
&A^\mu(x)\longrightarrow A^\mu(x)+\partial^\mu\omega(x),
\end{aligned}\tag{3.13}
$$

其中$\omega(x)$是一个任意的实函数，我们看到电荷e起着规范群$U(1)$的生成元的作用（至多差一常数因子）。原来的体系只有整体规范不变性，在时空的任何一点一个粒子的电荷都必须规定为e。然而，在扩充为定域规范不变性的体系里，在每一个时空

[译者注] 本书作者把“gauge”一词，除了用在通常理解的规范变换外，还用来特指由整体规范不变性扩大为定域规范不变性，这里是后一种意义，译成“规范化”。

点可以独立地取电荷为$\pm e$，因为$\omega(x)$的符号可以自由变化。不论我们选取$+e$或$-e$，理论的物理内容都是相同的，因为规范场保持正确的表达形式。

在最普遍的情况下，一开始我们有一组物质场$\{\phi_1(x)\cdots\phi_n(x)\}$（可能是玻色场，也可能是费米场），它们构成$U(1)$群的一个表示（通常是可约表示），$U(1)$群的生成元由一个$n\times n$对角矩阵表示，其本征值$Q_1$，…，$Q_n$分别为这些物质场的电荷。整体规范变换是由下列变换所表示的$U(1)$群的一个元素

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}e^{-iQ_1\omega} & 0 & 0\cdots\cdots\\ 0 & e^{-iQ_2\omega} & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0\cdots\cdots & \cdots\cdots & e^{-iQ_n\omega}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

其中ω是一个任意的实常数。我们可以把（3.14）改写成更简洁的矩阵形式：

$$\phi(x)\longrightarrow U\phi(x),$$
$$U=e^{-iQ\omega}, \tag{3.15}$$

假定拉格朗日密度$\mathscr{L}_0(\phi,\partial^\mu\phi)$在变换（3.15）下是不变的。为了把这一对称性扩大为定域的对称性，代替$\partial^\mu\phi$取

$$D^\mu\phi(x)=[\partial^\mu+iQA^\mu(x)]\phi(x) \tag{3.16}$$

扩大后体系的拉格朗日密度与（3.10）有相同的形式。

作为$U(1)$的表示，（3.15）没有对电荷$Q_1,\cdots,Q_n$的取值加上任何约束。它仍然未能解释如下实验事实：自然界中所有观测到的电荷都是一个共同单位的整倍数（电荷量子化）。一种可能的解释是说电磁的$U(1)$群是一个紧致(compact)对称群G的子群。那时，（3.15）中的矩阵$U(1)$必将是ω的周期函数，结果电荷将成为量子化的[2]。

物质场的拉格朗日密度还可以有另外一些不被“规范化”的$U(1)$对称性，例如重子数和轻子数。只要它们与电磁的$U(1)$群对易，则仍将保持为$\mathscr{L}$的整体对称性。

通过下述论证，似乎可以看到，这个理论预言光子是无质量的。在洛仑兹规范下（$\partial_\mu A^\mu=0$），规范场的运动方程为$\Box^2 A^\mu=j^\mu$。正如规范不变性自然地提出的要求那样，假定体系的最低态是$\phi=0$[注b]（因为ϕ不是规范不变的，人们自然可以期望这个最低态是唯一的）。那时，规范场的低能模式满足$\Box^2 A^\mu=0$，其解为波矢为k^μ，且$k^2=0$的平面波。这些模式相应于量子理论中的无质量的光子。然后，我们可以通过微扰展开成e的幂级数把j^μ考虑进来，这样就得到了一个借助于无质量光子的发射和吸收来描写相互作用的理论方案。量子电动力学正是这样一种理论，它的预言都在极高的精确度上得到了实验的检验。因此，似乎可以认为光子的零质量乃是该理论的后果，特别是该理论的规范不变性的后果。

然而，如果微扰论不适用，上述论证就不成立。若最低态[注c]$\phi\neq0$，即通常称为"对称性自发破缺"的情况显然正属于此类。那时，光子的确显现了质量。这一点我们将在3.3节详细地讨论。

即使在最低态$\phi=0$，微扰论的适用性也不能从数学上证明，光子可以有质量这一点在逻辑上讲也仍然是可能的[3]。事实上在施温格（Schwinger）模型[4]，即一维空间的量子电动力学里，光子的确获得了质量。几乎可以证明[5]，如果电子的电荷小于一个临界值，那么在量子电动力学中光子就是无质量的，如若不然，光子就获得质量。这一临界值是未知的，尽管人们很愿意相信它比物理的电子电荷要大一些。这样看来，通常量子电动力学中光子的质量为零并不是起源于该理论中任何已知的原理，而是起源于通常微扰论是适用的这一假设。

[注b] 这里我们不够严密地用了"态"的术语，用它来或者代表一个经典解，或者代表量子理论的一个状态。

[注c] 在量子理论里，这一说法要改成$\langle\phi\rangle\neq0$，其中$\langle\phi\rangle$是ϕ的真空期待值。

3.2 整体规范不变性的自发破缺：戈德斯通方式(Goldstone mode)

如果在体系的一种对称性变换下，它的最低态不保持不变，则称该体系的这一对称性是"自发破缺的"。这种情况并非神秘莫测，在宏观世界里是很普通的。例如，在铁磁体内部，转动对称性是自发破缺的；而在一块无穷大的晶体内部，平移对称性是自发破缺的。

在这里，我们要讨论的是相对论场论中的整体规范不变性的自发破缺。作为一个简单的例子，我们仍回到由(3.1)所定义的复标量场，不考虑电磁耦合。体系的经典哈密顿量为

$$H=\int d^3x[\pi^*\pi+\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi+V(\phi^*\phi)], \tag{3.17}$$

其中 $\pi=\partial\phi/\partial t$。运动方程的最低可能能量的解相应于 $\phi(x)$ 为常数，即 $\phi(x)=\phi_0$，它使 $V(\phi_0^*\phi_0)$ 取最小的可能值。显然，这也使 H 取极小，因而是场方程的解，因为对于不依赖时间的 ϕ，H 与作用量成正比。如果 $\phi_0\neq0$，这个解在相位改变时显然不是不变的。因此整体规范不变性是自发破缺的。那时，与 ϕ_0 的相角是任意的这一事实相对应，最低态是无穷多重简并的。

为确定起见，我们取

$$V(\phi\phi^*)=\mu^2\phi^*\phi+\lambda(\phi^*\phi)^2+\text{常数}, \tag{3.18}$$

选取四次多项式形式的理由在于应用以 λ 幂级数展开为基础建立的微扰论，相应的量子场论是可重整的。运动方程为

$$(\Box^2+\mu^2)\phi=-2\lambda(\phi^*\phi)\phi, \tag{3.19}$$

自由场相应于 $\lambda=0$，$\mu^2>0$。这时，在最低态以上的经典模式是些波矢为 k^μ、并且 $k^2=\mu^2$ 的平面波，它们相应于量子理论中质量为 μ 的单粒子态。

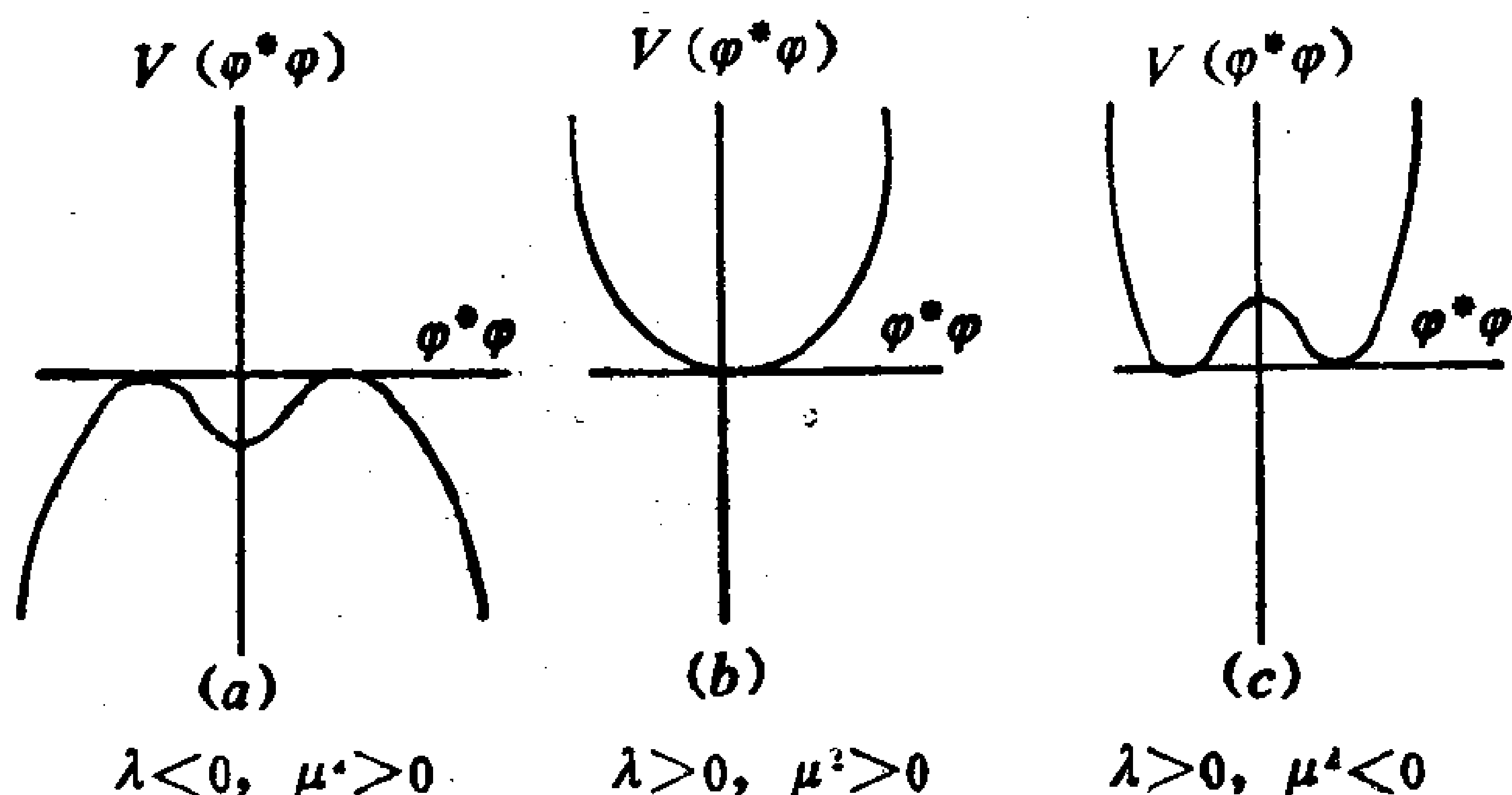


图 3.1 各种参量选择下的势能图

若 $\lambda<0$，该理论不存在，因为哈密顿量无下限。若 $\lambda<0$ 而 $\mu^2>0$，则 V 的形状如图 3.1(a)所示。当场被包含在 V 的局部极小值内（在场空间）时可能会出现体系能有亚稳态的情况。在粒子量子力学中，这种情况或许会实现，但在量子场论中则不会。在后一种情况下，这样一个初态在无限空间的衰变几率是无穷大，因为每单位体积内的衰变几率值是有限的。

若 $\lambda>0$，则可能有 $\mu^2>0$，或 $\mu^2<0$，V 的相应形状如图（3.1）（b）和 3.1(c)所示。前一种情况下，最低能量的解是 $\phi=0$，因此不存在对称性自发破缺。而在后一种情况下，$\phi\neq 0$，这正是我们要研究的。

为了方便，把（3.18）改写成下列形式

$$V(\phi^*\phi)=\lambda(\phi\phi^*-\phi_0^2)^2,\quad (\phi_0\neq 0) \tag{3.20}$$

最低态相应于 $\phi^*\phi=\phi_0^2$，或

$$\phi(x)=\phi_0 e^{i\alpha_0}, \tag{3.21}$$

其中 α_0 是一个任意的实常数。

量子理论的低能状态可以通过考察经典的低能模式推论出来。我们设

$$\phi(x)=[\phi_0+\eta(x)]e^{i\alpha(x)}, \tag{3.22}$$

使得复场 $\phi^*(x)$ 和 $\phi(x)$ 被实场 $\eta(x)$ 和 $\alpha(x)$ 所代替，用这些实场可以把拉格朗日密度写成

$$\mathscr{L}_0=\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta-\lambda(2\phi_0-\eta)^2\eta^2+(\phi_0+\eta)^2\partial^\mu\alpha\partial_\mu\alpha. \quad (3.23)$$

假设 η 很小，省略掉二次以上的项，我们得到

$$\mathscr{L}_0\cong[\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta-4\lambda\phi_0^2\eta^2]+\phi_0^2\partial^\mu\alpha\partial_\mu\alpha+O(\eta^3). \quad (3.24)$$

括号里的项描写质量为 $2\phi_0\sqrt{\lambda}$ 的自由粒子。下一项描写自由的无质量的标量粒子。略去的项描写这些粒子间的相互作用。图3.2给出了这些经典模式的图解，其中 V 被画成 $\mathrm{Re}\phi$ 和 $\mathrm{Im}\phi$ 的函数。我们可以看到 $\phi_0\neq 0$ 和存在无质量模式之间的直接联系。

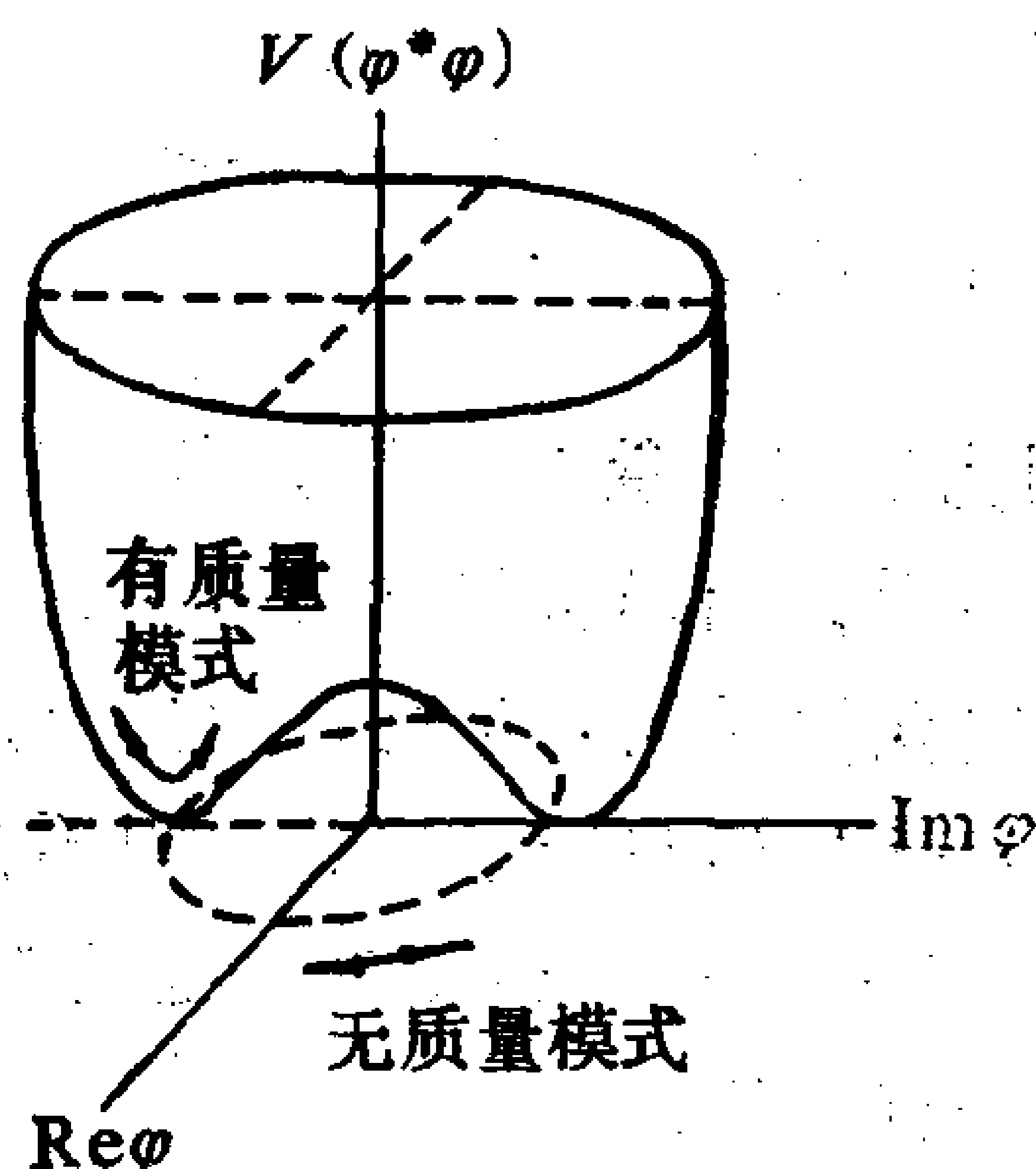


图3.2 在有着对称性破缺势的标量场中的经典模式

在量子理论中，(3.21)中的 α_0 的每一个值都给出一个可能的真空态。当空间体积为无穷大时，带有不同的 α_0 值的真空之间的跃迁振幅为零。

“一个连续的整体对称性的自发破缺意味着存在一个零质量、自旋为零的粒子”这一断言，通常称为戈德斯通定理[6]，而这种无质量的粒子称为戈德斯通玻色子。自发破缺了的对称性当然仍是体系的对称性。但它并不表现为最低态的不变性，而是以“戈德斯通方式”，即通过存在戈德斯通玻色子表现出来。

在非相对论多体系统中有一些戈德斯通玻色子的例子，如铁磁体中的自旋波，晶体中和液氦中的声子等。

3.3 定域规范不变性的自发破缺：希格斯方式(Higgs mode)

当一个定域规范对称性自发破缺时，这一对称性也不再以最低态的不变性的方式表现出来。然而，在这种情况下没有任何戈德斯通玻色子产生，取而代之的是规范场获得质量。我们称这种对称性以“希格斯方式”表现出来。

让我们来考虑标量电动力学，且取 V 为 (3.20) 的形式，则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - V(\phi^*\phi),\\ D^\mu\phi &= (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi, \qquad\qquad (3.25)\\ V(\phi^*\phi) &= \lambda(\phi^*\phi - \phi_0^2)^2, \qquad (\phi_0\neq 0)\end{aligned}$$

在如下定域规范变换下，这个拉格朗日密度是不变的：

$$\begin{aligned}A^\mu(x) &\to A^\mu(x) + \partial^\mu\omega(x),\\ \phi(x) &\to e^{-ie\omega x}\phi(x), \qquad\qquad (3.26)\\ \phi^*(x) &\to e^{ie\omega(x)}\phi(x),\end{aligned}$$

其中 $\omega(x)$ 是一个任意的实函数。由于 $\phi_0\neq 0$，这个定域规范对称性是自发破缺的。引起这一破缺的场 $\phi(x)$ 称为“希格斯场”。

在正则形式中，变量如下：

场	正则共轭	
A^μ	$-F_{0\mu}$	
ϕ	$\pi=(D^0\phi)^*$	(3.27)
ϕ^*	$\pi^*=D^0\phi$	

由于与 A^0 正则共轭的量恒等于零，所以 A^0 不是一个独立变量，因而可以通过运动方程，借助其它一些变量把它消去。

引入电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$

$$E^k = F^{k0},$$

$$B^k = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F^{ij}. \tag{3.28}$$

或

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla A^0,$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{3.29}$$

可以把哈密顿量改写成

$$H = \int d^3 x \left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}) + |\pi|^2 + |D\phi|^2 + V\right]. \tag{3.30}$$

推导 (3.30) 时，用了运动方程并略掉了面积分 $\int d^3x \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\cdot A^0)$[注d]。(3.30) 式显然是规范不变的，但它仍然包含 A^0。消去 A^0 后得到的最后式子将与所选取的特殊的规范有关。H 的数值当然是规范不变的。

从 (3.30) 易见，最低能量解为

$$A^\mu(x) = 0,\ \phi(x) = \phi_0 e^{i\alpha_0}. \tag{3.31}$$

为了研究这个解附近的经典模式，采用“么正规范” (unitary gauge) 是最方便的。在这种规范里 $\phi(x)$ 是实的，它的相因子通过连续的定域规范变换而被去掉了。这一点总是可以做到的，因为 ϕ 满足一个二阶微分方程，所以它的相位必须有连续的微商。于是，我们总可以写成

$$\phi(x) = \rho(x) \qquad (\text{实函数}). \tag{3.32}$$

运动方程变成：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -2e^2\rho^2 A^\nu,$$

$$(\partial^\mu + ieA^\mu)(\partial_\mu + ieA_\mu)\rho = 2\lambda\rho(\phi_0^2 - \rho^2). \tag{3.33}$$

由于 $\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0$，所以我们必须有

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \qquad \text{只要}\ \rho(x) \neq 0. \tag{3.34}$$

[注d] 请看第四章中更普遍的公式(4.92)的推导。

现在，我们设

$$\rho(x)=\phi_0+\eta(x), \tag{3.35}$$

并且把$\eta(x)$和$A^\mu(x)$都看做小量，则线性化后的运动方程为

$$(\Box^2+2e^2\phi_0^2)A^\mu=0 \qquad (\partial_\mu A^\mu=0),$$
$$(\Box^2+4\lambda\phi_0^2)\eta=0. \tag{3.36}$$

在量子理论中，这些结果导致一个质量为$\sqrt{2}e\phi_0$的自旋为1的粒子和一个质量为$2\sqrt{\lambda}\phi_0$的自旋为0的粒子。没有任何无质量的粒子。原来的场（在固定的规范下）A^1，A^2，ϕ，ϕ^*现在被A^1，A^2，A^3，η所代替（辅助条件$\partial_\mu A^\mu=0$去掉了A的自旋为0的部分）。可以说，对称性的“规范化”使“本应存在的戈德斯通玻色子”转化为获得质量的规范场的纵分量。假如我们采用的不是么正规范而是别的规范，那么谱的实质还会是一样的，只不过可能不那么明显。光子由之获得质量的这种方式称为“希格斯机制”[7](Higgs mechanism)。

“希格斯机制”实际起作用的物理例子是超导。理论本身的拉氏量在电子场定域的相位改变下是不变的，但是由于两个电子组成的库柏对（Cooper pair）的凝聚（condensation），基态在上述变换下不是不变的。结果，光子在超导体内部变成有质量的粒子。特别是从外部作用的磁场只能透入该物体有限的深度。这个深度就等于光子质量的倒数（Meissner 效应）。描写凝聚现象的唯象方法，如兰道（Landau）-金斯伯格（Ginsberg）理论[8]，是引入一个描述凝聚的“序参量”（order parameter）$\phi(x)$。在这样的方法中，（3.25）就用来作为唯象的拉格朗日密度。

象超导这种不用基本的希格斯场产生的对称性自发破缺，有时称之为“动力学对称性破缺”（“dynamical symmetry breaking”）。这个术语暗示着为了使对称性破缺，在“正常”情况下，希格斯场是必需的。这是一种没有什么物理事实为依据，只

是基于数学上的简单而产生的偏见。

3.4 有限能量的经典解

由（3.30）可见，一个有限能量的解必须满足

$$\int d^3x(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})<\infty,$$
$$\int d^3xV(\phi^*\phi)<\infty, \tag{3.37}$$

其中的第一式意味着 $F^{\mu\nu}$ 有渐近行为 $F^{\mu\nu}\to O(x^{-2})$，因此 $A^\mu\to\to\partial^\mu\omega+O(x^{-1})$ 。即：

$$A^\mu(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}(\text{纯规范项})+O(x^{-1}). \tag{3.38}$$

（3.37）的第二个条件意味着

$$\phi(x)\longrightarrow\phi_0e^{ia(x)}+O(x^{-4}). \tag{3.39}$$

现在我们可以把这些条件加到运动方程（3.11）上，为此先把运动方程改写成

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=-2e\,\mathrm{Im}(\phi^*D^\nu\phi). \tag{3.40}$$

由（3.38）可知$\partial_\mu F^{\mu\nu}\to O(x^{-3})$，于是上式右边也应有同样的结果。从（3.38）和（3.39）我们得到

$$D^\nu\phi\xrightarrow[x\to\infty]{}i\phi\partial^\nu(e\omega+a)+O(x^{-2}), \tag{3.41}$$

因此 $$\mathrm{Im}(\phi^*D^\nu\phi)\xrightarrow[x\to\infty]{}\phi_0^2\partial^\nu(e\omega+a)+O(x^{-2}), \tag{3.42}$$

为使该式成为 $O(x^{-3})$，第一项必须与第二项相消，于是要求有 $\partial^\nu(e\omega+a)\to O(x^{-2})$，或

$$D^\nu\phi\xrightarrow[x\to\infty]{}O(x^{-2}). \tag{3.43}$$

由于沿半径 R 很大的圆周上，任何一段无穷小圆弧 dx 的长度都是 $Rd\theta$，其中 $d\theta$ 是角位移，所以，根据（3.43）式，$dx^\mu D_\mu\phi\sim R^{-1}d\theta$。这就是说，一个有限能量的经典解必须满足边界条件：

$$dx^{\mu}\bar{D}_{\mu}\phi(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0. \tag{3.44}$$

人们对有限能量的经典解感兴趣是因为它们包括了稍后我们将要讨论的“孤粒子”解．这并不一定意味着具有无限能量的经典解都和物理学无关。例如，经典的平面波能量为无穷大，但在量子理论中它却代表着有限能量的单粒子态。

3.5 磁通量量子化

考虑一个静态有限能量的经典解。我们总可以选 $A^0=0$。在无穷远处，边界条件（3.38）和（3.39）记为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})&\xrightarrow[\boldsymbol{x}\to\infty]{}\frac{1}{e}\nabla\alpha(\boldsymbol{x}),\\ \phi(\boldsymbol{x})&\xrightarrow[\boldsymbol{x}\to\infty]{}\phi_0e^{i\alpha(\boldsymbol{x})}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

我们把半径很大的圆 C 上的 $\alpha(\boldsymbol{x})$和 $\phi(\boldsymbol{x})$分别用 $\alpha(\theta)$ 和 $\phi(\theta)$ 表示，因为它们仅依赖于角度 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$．又因为 $\phi(\theta)$ 满足一个微分方程，在空间各点它必须是连续的．因此

$$\phi(2\pi)=\phi(0), \tag{3.46}$$

而这意味着

$$\alpha(2\pi)-\alpha(0)=2\pi n\ \ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{3.47}$$

穿过圆 C 的净磁通量为：

$$\Phi=\iint d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}=\oint_{c}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A} \tag{3.48}$$

其中 $d\boldsymbol{S}$ 是 C 所包围的曲面的面元，$d\boldsymbol{s}$ 是沿着圆 C 的弧元．利用（3.45）和（3.47）我们得到：

$$\Phi=\frac{2\pi n}{e}\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots). \tag{3.49}$$

这是磁通量量子化的一种表述，对于有限能量的解，它是一个必要

条件。

在三维空间，我们必须选取$n=0$，否则磁力线就会延伸到无穷远而破坏有限能量的条件（3.37）。然而在二维空间，n可以取任何整数值（在磁场垂直于这个二维平面时）。二维情况可以看做一个与z坐标无关的三维解，它沿着z轴每单位长度有有限的能量。

下面我们继续考虑x-y平面的二维问题。设$\alpha(\theta)=n\theta+\beta(\theta)$，其中$\beta(2\pi)-\beta(0)=0$。于是，$\beta(\theta)$是一个连续函数，可以通过连续的规范变换把它变成0。因此，可以选择这样一种规范，使

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1}{e}\nabla(n\theta)=\hat{\theta}\frac{n}{er},\quad\text{（纯规范）}$$

$$\Phi\xrightarrow[x\to\infty]{}\phi_0e^{in\theta}.\tag{3.50}$$

注意：$\boldsymbol{A}$是多值的，但$\oint d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}$是单值的。对于任何一个$n$值，由于$\boldsymbol{A}$趋近于纯规范，所以磁场渐近地趋于零。整数$n$标记着不同的“规范类”，它们不可能通过连续的规范变换联系起来。这表明在无穷远处就可以知道被限制于x-y平面有限区域的磁通量的存在。

这件事构成了阿哈罗诺夫-玻姆（Aharonov-Bohm）效应[9]的基础。这个效应是指电子被一个不可穿透的圆柱体散射，散射的不同方式依赖于完全被限制在圆柱体内部的磁通量，既使电子从未进入磁场区域。其理由是电子波函数的相因子与圆柱外部非零的纯规范矢量势有角关联。这个相位只依赖于圆柱体内的总磁通量，因此是规范不变的。

磁通量量子化条件（3.49）是从能量的考虑得到的。人们总可制备一个不服从该条件的初态，但随之感生的电流将调整磁通量的值，最终使它等于量子化的数值。还应指出，（3.49）式仅

适用于圆柱形物体。例如对于限制在一个环形体内的磁通量，它就不成立了[10]。

在经典的带电粒子的电动力学中，知道了 $F^{\mu\nu}$ 完全确定了体系的性质。在那里，A^μ 的知识成为多余的了，因为 A^μ 只能确定到仍可做规范变换的程度，$F^{\mu\nu}$ 却不受这一规范变换的影响。正如我们已经看到的，量子理论的情况就不同了，这时带电粒子直接与 A^μ 耦合，只有 $F^{\mu\nu}$ 的知识就不够了。尽管 A^μ 的连续规范变换仍然在物理上无关，不连续的规范变换却可以产生不同的规范类，导致不同的物理效应，即使 $F^{\mu\nu}$ 仍保持着规范不变性。能够详细描述一个体系的完整的信息是由 $F^{\mu\nu}$ 加上规范类的规格构成的。

3.6 孤粒子解：涡旋线

孤粒子解是一种在空间的有限区域内保持非零能量密度的有限能量的经典解。在三维空间，唯一可能的孤粒子是那些其磁通量被限制在与圆环拓扑等价的封闭管子里的解[11]。在二维空间（可看做与 z 坐标无关的三维情况），孤粒子是一些“涡旋线”。这是一种这样的结构：其量子化的磁通量被限制在有限半径的直管子里，同时希格斯场在管外取正常值 ϕ_0，趋向管轴时逐渐衰减为零。这样的涡旋线在超导体的实验中已经观察到了，在那里涡旋线的端点是与该导体表面连在一起的[12]。

我们在 x–y 平面上取柱坐标 (r,θ)，并在库仑规范下 $(\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0)$ 求边界条件为 (3.50) 的运动方程的静态解。静态运动方程为

$$(\nabla^2-2e^2\phi^*\phi)\boldsymbol{A}=-i\phi^*\overleftrightarrow{\nabla}\phi,$$
$$(\nabla-ie\boldsymbol{A})^2\phi=2\lambda\phi(\phi^*\phi-\phi_0^2), \tag{3.51}$$

其中取 $A^0=0$，为了找到柱对称解，设

$$\boldsymbol{A}(r,\theta)=\hat{\theta}A(r)\ , \tag{3.52}$$

$$\phi(r,\theta)=\rho(r)e^{in\theta}.$$

则磁场为 $$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\hat{z}\frac{1}{r}\ \frac{d}{dr}[rA(r)]. \tag{3.53}$$

又设 $$A(r)=\frac{n}{er}[1-F(r)], \tag{3.54}$$

$$B(r)=\frac{n}{er}F'(r),$$

其中，一撇"′"代表对 r 的微商。那时，(3.51) 可以改写成

$$F''-\frac{F'}{r}-2e^2\rho^2F=0,$$

$$\rho''+\frac{\rho'}{r}-\frac{n^2F^2}{r^2}\rho-2\lambda\rho(\rho^2-\phi_0^2)=0. \tag{3.55}$$

它的边界条件为

$$F\xrightarrow[r\to\infty]{}0,\ \rho\xrightarrow[r\to\infty]{}\phi_0. \tag{3.56}$$

磁通量量子化意味着：

$$2\pi\int_0^\infty dr\,rB(r)=\frac{2\pi n}{e}, \tag{3.57}$$

或 $$F(0)=1\qquad(\text{对 } n\neq0)\ ,$$

在 $r=0$ 附近，解为

$$F\xrightarrow[r\to0]{}1-O(r^2),$$

$$B\xrightarrow[r\to0]{}\text{常数}, \tag{3.58}$$

$$\rho\xrightarrow[r\to0]{}ar^{\mu}.$$

对 $r\to\infty$，我们可以在 (3.55) 中取 $\rho=\phi_0$，则得到渐近公式

$$F(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}\text{常数}\cdot r^{1/2}\exp(-\sqrt{2}\,e\phi_0r)\ ,$$

$$A(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}\frac{n}{er}+O(e^{-r}),$$

$$B(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} O(e^{-r}). \tag{3.59}$$

可以用变分原理证明的确存在一个解.对于静态解,作用量与下述能量值的负值成正比:

$$\mathscr{E} = \int_0^\infty drr\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{er}\right)^2 (F')^2 + \left(\frac{n}{r}\right)^2 F^2\rho^2 + (\rho')^2 + V(\rho)\right], \tag{3.60}$$

且满足条件:

$$F(0) = 1, \qquad F(\infty) = 0,$$
$$\rho(0) = 0, \qquad \rho(\infty) = \phi_0. \tag{3.61}$$

因为(3.60)中每一项都是非负的,所以$\mathscr{E}$对于F和ρ的变分有一个最小值。使$\mathscr{E}$取最小的F和ρ,就是有着给定的n,并满足所要求的边界条件的最低能量的解。考察一下(3.60)可以看到这些解的定性的特点。为了使$\mathscr{E}$取极小,$(F')^2$要使F成为尽可能光滑的函数,$(\rho')^2$要使ρ成为尽可能光滑的函数,而$F^2\rho^2$必须尽可能的小。最后一个条件意味着F大的地方,ρ必须小,反之亦然。利用这些结果并考虑到(3.58)和(3.59),可以粗略地画出如图3.3所示的F和ρ的曲线。这个草图表明了

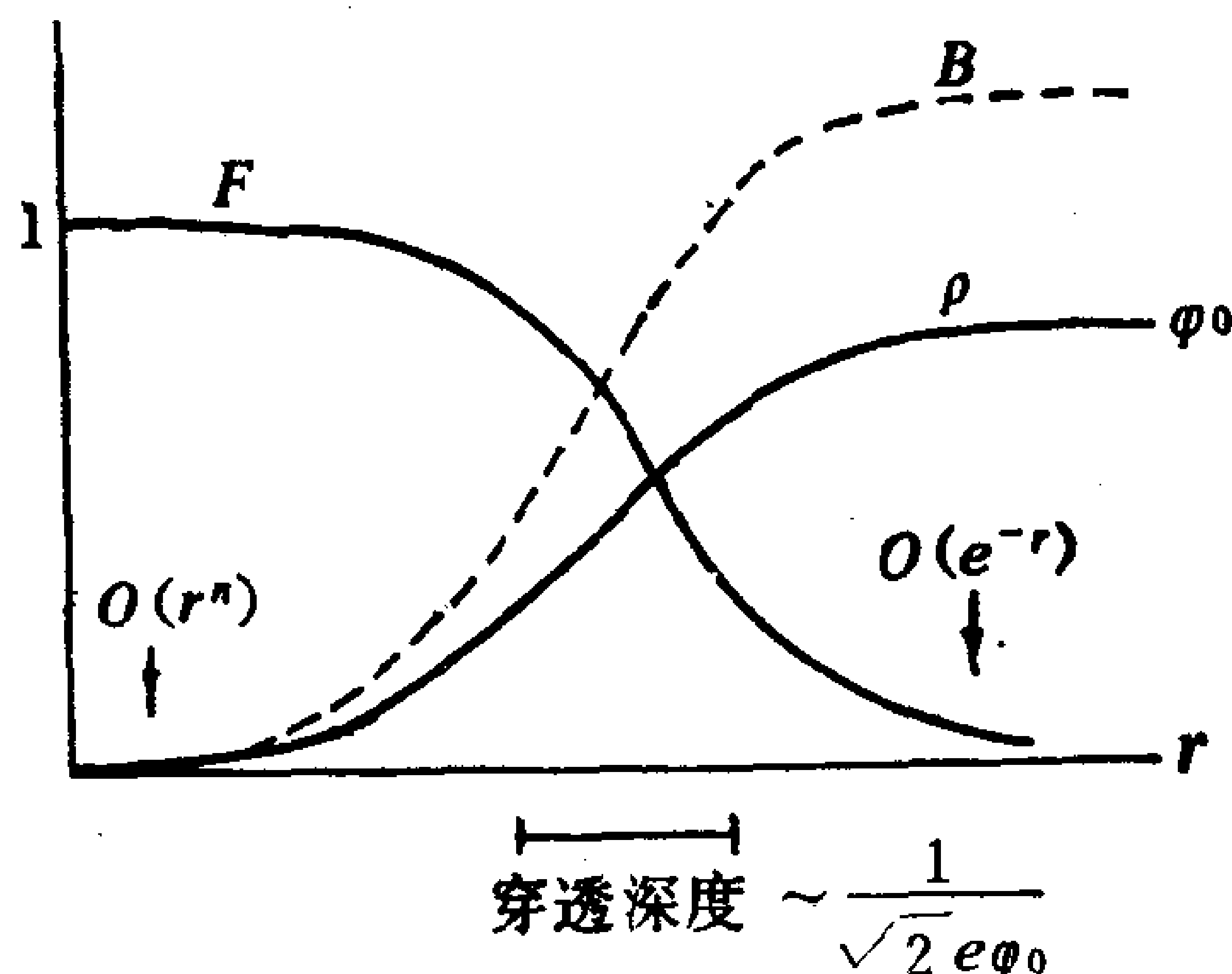


图 3.3 涡旋线内的磁场 B 和希格斯场 ρ 作为到涡旋轴的法向距离 r 的函数图

涡旋线的定性特征。

这里给出的经典处理可以看作是受到限制的磁通量非常强的一种经典极限。完整的量子力学的处理，目前仍存在一些困难。

参考文献

[1] S. B. Treiman, R.Jackiw and D.J.Gross, *Lectures in Current Algebra and its Applications*(Princeton University Press, Princeton, 1972) PP. 101ff

[2] C. N. Yang, *Phys. Rev.* D1, 2360 (1970) .

[3] J. Schwinger, *Phys. Rev.* 125, 397 (1962) .

[4] J. Schwinger *Phys. Rev.* 128, 2425 (1962)

[5] K. Wilson, *Phys. Rev.* D10, 2445 (1974) ; A. Guth, *Phys. Rev.* D21, 2291, (1980) .

[6] J. Goldslone, N. *Cim.* 19, 154 (1961) ; J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* 127, 905 (1962) .

[7] P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* 12, 123(1964); F. Englet and R. Brout, *Ibid*, 13, 321 (1964) . G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W.B.Kibble, *Ibid*, 13, 585 (1964) .

[8] Ginsberg and L. Landau, *Zh. Theor. Fiz.* 47, 2222 (1957). [*Sov. Phys, JETP* 5, 1174 (1957)].

[9] Y. Aharonov. and D. Bohm, *Phys. Rev.* 115, 485 (1959).

[10]K. Huang and R. Tipton, *Phys. Rev.* 23, 3050 (1981) . Appendix

[11]K. Huang and R. Tipton, *op. cit.*

[12]K. Mendelsohm, *The Quest for Absolute Zero* (Taylor and Francis, London, 1977) .

第四章　杨-密尔斯场——非阿贝尔规范理论

4.1　导言

麦克斯韦场容许我们自由地规定在不同时空点粒子电荷的正负号。对于与更高的对称性相联系的量子数，杨-密尔斯场起着类似的作用。历史上，它们是由杨振宁和密尔斯研究同位旋时引入的[1]。他们是这样表述自己的动机的：

“同位旋守恒[注a]就是要求所有的相互作用在同位旋转动下具有不变性。这意味着，当电磁相互作用可以忽略时（这正是我们下面将要采用的假定），同位旋的取向是没有任何物理意义的。那时，中子与质子之间的区分纯粹是任意的。然而，照通常的想法，一旦人们在一个时空点选定了什么是质子，什么是中子，则在其它的时空点就不能再任意地选择了。

看来，这与做为通常物理理论基础的定域场概念是不自洽的，……”

现在，我们相信同位旋不是而且也不能是一种规范对称性，因为它不是自然界中精确的对称性。但杨和密尔斯的思想，当用于其它内部对称性时，却导致了现在流行的相互作用规范理论。这里所涉及的内部对称性都与李群密切相关。

[注a]“同位旋”一词原文使用的是 isotopic spin，作者注释中指出该词与“isospin”同义，前者是后者的旧名。

4.2 李群[2]（Lie group）

1. 结构常数 (structure constant)

就我们所涉及的应用而言，可以认为：李群是由李代数（Lie algebra）生成的连续群，李代数则是一个由N个生成元（generator）$L_a(a=1,2,\cdots,N)$做为基构成的空间，这些L_a在对易运算下是封闭的，即

$$[L_a, L_b]=iC^c_{ab}L_c. \tag{4.1}$$

这里我们使用了对重复指标求和的约定。常数C^c_{ab}都是实数，称为结构常数。它们完全地描写了该李代数的特征。G的元素有如下形式[注b]

$$U=e^{-i\omega_a L_a}, \tag{4.2}$$

其中ω_a是一些任意的实数[注c]。

结构常数不是唯一的，因为在生成元的线性变换下，群不变，但这些常数要改变。然而，它们的某些性质是不变的。首先，由（4.1）显然有

$$C^c_{ab}=-C^c_{ba}, \tag{4.3}$$

其次，对易关系满足的雅科比恒等式（Jacobi identity）

$$[[L_a,L_b],L_c]+[[L_b,L_c],L_a]+[[L_c,L_a],L_b]=0 \tag{4.4}$$

要求有恒等式

$$C^n_{ab}C^d_{nc}+C^n_{bc}C^d_{na}+C^n_{ca}C^d_{nb}=0. \tag{4.5}$$

我们把它也叫做雅科比恒等式。

[注b] 这些元素构成群这件事并不简单，它要依赖Baker-Hausdoff-Campbell定理(见［2］)。

[注c] 我们采用的李群定义不够普遍，但对我们下面的应用是足够了。对于数学家，李群概念要普遍得多，即它是一个可以用参量解析地描写的连续群。

如果所有的结构常数都是零，G 就是一个阿贝尔群，实际上是N个$U(1)$群的直积。如果并不是所有的结构常数都为零，G 就是非阿贝尔群。最小的非阿贝尔李群是$SU(2)$群，它的维数 $N=3$。

如果对 $\{L_a\}$ 做一个线性变换之后，可以把指标 a 分成这样的两组，使得只要 a 属于一组，而 b 属于另外一组，则 $C_{ab}^{c}=0$，那么这个李代数就被分成了两个对易的子代数（subalgebra）。这时，G 是两个独立的李群的直积。不能分解成这样因子的非阿贝尔李群称为单（simple）李群（请注意，$U(1)$不包括在内）。它的特征是任何两个生成元都可以通过一串对易运算联系起来。单李群的直积称为半单（semi-simple）李群。

2. 矩阵表示

我们把生成元用矩阵表示。由此诱导出G的矩阵表示。为了避免不必要的复杂性，我们只考虑有限维表示[注d]。如果 $\{L_a\}$ 满足（4.1）式，则它的厄米共轭的集合 $\{L_a^\dagger\}$ 也一定满足该式。因此可以把 $\{L_a\}$ 用有限维的厄米矩阵表示。那时，群元则用有限维的么正矩阵表示。

最低维的忠实（faithful）表示称为**基础表示**。其它的表示都可以由重复地取基础表示自己的直积求得。在 2.2节对 $SU(3)$ 群曾讨论过这种手续的一个例子。

永远存在一个完全由结构常数确定的不可约表示（不一定是忠实表示），即**伴随表示**。它的维数是 N（生成元的数目），L_a 的表示矩阵由下式给定：

$$(L_a)_{bc}=-iC_{ab}^{c}. \tag{4.6}$$

[注d] 这样就把洛仑兹群排除在我们的讨论之外了。因为它的么正表示都是无限维的。而另一方面，它的有限维表示都不是么正的，于是又被(4.2)式排除了。

在杨-密尔斯规范理论中，这个表示起着重要作用。为了证明它是一个表示，我们来计算对易关系

$$
\begin{aligned}
[L_a, L_b]_{cd} &= (L_a)_{cn}(L_b)_{nd} - (L_b)_{cn}(L_a)_{nd} \\
&= -C^n_{ac}C^d_{bn} + C^n_{bc}C^d_{an} = C^n_{ca}C^d_{bn} + C^n_{bc}C^d_{an} \\
&= -C^n_{ab}C^d_{nc}\ \text{（根据雅科比恒等式）} \\
&= C^n_{ab}i(L_n)_{cd}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

通过定义 L_a 和 L_b 之间的标积为

$$
g_{ab} \equiv \mathrm{Tr}(L_aL_b)_{\text{伴随表示}} = -C^m_{an}C^n_{bm}, \qquad (4.8)
$$

可由单李代数构造一个度规空间，g_{ab} 显然是一个对称张量。因为 L_a 是厄米的，所以 L_a 的模是正定的（即 $g_{aa}>0$）。因此，利用生成元的线性变换，可以把 g_{ab} 对角化，并使其所有的本征值都为1：

$$
g_{ab} = \delta_{ab}. \qquad (4.9)
$$

若定义新的结构常数 C_{abc} 为

$$
C_{abc} \equiv C^n_{ab}g_{nc}. \qquad (4.10)
$$

则利用雅科比恒等式可以证明 C_{abc} 对指标 a,b,c 是完全反对称的。利用（4.9）式，我们得到

$$
C^c_{ab} = C_{abc}. \qquad (4.11)
$$

于是，C^c_{ab} 对于指标 a、b、c 是完全反对称的。从现在起，我们将用 C_{abc} 来代替 C^c_{ab}。

对于单李群的任何表示，可以把（4.8）和（4.9）式推广成

$$
\mathrm{Tr}(L_aL_b) = K\delta_{ab}\quad \text{（对单李群）}. \qquad (4.12)
$$

其中 K 与表示有关，而不依赖于 a。证明要靠（4.11）式。首先，注意到总可以通过适当选择 $\{L_a\}$ 使张量 $\mathrm{Tr}(L_aL_b)$ 对角化，结果有

$$
\mathrm{Tr}(L_aL_b) = \begin{cases} 0 & \text{若 } a\neq b \\ K_a & \text{若 } a=b. \end{cases} \qquad (4.13)
$$

我们只要再证明 K_a 与 a 无关，为此，定义

$$d_{abc} \equiv \mathrm{Tr}\{[L_a, L_b], L_c\} = \mathrm{Tr}(L_a L_b L_c) - \mathrm{Tr}(L_b L_a L_c). \quad (4.14)$$

显然，它对指标a, b, c是完全反对称的。依次应用(4.1)和(4.13)式，可以得到

$$d_{abc} = iC_{abn}\mathrm{Tr}(L_n L_c) = iC_{abc}K_c \quad \text{（不对 } c \text{ 求和）}. \quad (4.15)$$

交换指标b和c，我们有

$$d_{acb} = iC_{acb}K_b \text{（不对 } b \text{ 求和）}. \quad (4.16)$$

由于$d_{abc} = -d_{acb}$，$C_{abc} = -C_{acb}$，再把(4.15)与(4.16)比较，我们得到结论为，只要$[L_c, L_b] \neq 0$，则有：

$$K_c = K_b. \quad (4.17)$$

由于这个群是单纯群，所以任何两个生成元都被一串对易关系连在一起。因此，所有的K_a都彼此相等。这样就证明了(4.12)式。

最后，我们注意到，厄米矩阵$\{L_a\}$可以用实的反对称矩阵$\{T_a\}$来代替，它们的定义为

$$T_a \equiv -iL_a. \quad (4.18)$$

对易关系变成

$$[T_a, T_b] = -C_{abc}T_c. \quad (4.19)$$

伴随表示为

$$(T_a)_{bc} = -C_{abc}. \quad (4.20)$$

表示群元的么正矩阵取如下形式：

$$U = e^{\omega_a T_a}, \quad U^{-1} = e^{-\omega_a T_a}. \quad (4.21)$$

3. 拓扑性质

在矩阵表示里，G是用$\{\omega_a\}$实现参数化的。为使ω_a与群元之间有一一对应的关系，$\{\omega_a\}$的可能值必须适当加以限制。$\{\omega_a\}$的可能值的空间称为G的**群流形**(group manifold)。如果群流形是一个紧集(compact set)，则该群称为**紧致群**(compact group)，若群流形中的每一条闭合路径(path)都可以通过连

续形变成一点，则该群称为单连通（simply-connected）的，否则称为多连通的（multiply-connected）。

李群与李代数之间的对应是多一对应（many-to-one）。例如，$SU(2)$和转动群$O(3)$是不同的群，但它们的李代数是相同的。这两个群的差别在于$SU(2)$是单连通的，而$O(3)$是双连通的。

在所有有着相同的李代数的李群中，只有一个是单连通的，它称为覆盖群（covering group）。比如，$SU(2)$就是$O(3)$群的覆盖群。

为阐明这些概念，我们更详细地来讨论$SU(2)$和$O(3)$。它们是仅有的两个有着由$C_{abc}=\varepsilon_{abc}$表征的李代数的群，而且都是紧致的。如所周知，$O(3)$群只有整数角动量表示，而$SU(2)$群既有整数又有半整数的表示。这个差别来自于这两个群各自的群流形的拓扑结构，它们是由这些群的定义所确定的。

我们可以用一个其方向指向转轴，长度等于转角的矢量的端点代表一个转动。这样，$O(3)$群流形就是由半径为π的球所包围的体积，且球面上由直径相连的两个点要看做是相同的点。后一条件来源于绕同一轴转$\pm\pi$角是同一个转动。在这个群流形里有两类闭合路径，即球内画的闭圈和球的直径。前者可以连续地形变为一点，后者却不能。因此$O(3)$是双连通的。

另一方面，$SU(2)$被定义为由该李代数的基础表示，即2×2矩阵生成的群。它的最一般的元素有如下形式

$$
\begin{aligned}
&U=e^{i\theta\hat{n}\cdot\sigma/2}=b_0+i\boldsymbol{b}\cdot\sigma,\\
&b_0\equiv\cos\theta/2,\\
&\boldsymbol{b}\equiv\hat{n}\sin\theta/2.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

因此，该群的参量为四个数b_0和$\boldsymbol{b}$，它们满足条件

$$
\sum_{i=1}^{4}b_i^2=1,
\tag{4.23}
$$

于是 $SU(2)$ 的流形是4维欧氏空间的单位球面，显然是单连通的。

$SU(2)$ 和 $O(3)$ 之间的差别可以用下列演示实验来说明。如图4.1(a) 所示，把一个牌子用橡皮筋吊在天花板上，然后再用橡皮筋把它系到地板上。把牌子绕竖直轴转 2π 角，使橡皮筋扭了一个结，这个结不可能通过橡皮筋的连续形变而解开（见图4.1 (b)）。然而，转动 4π 产生的扭结却可以通过橡皮筋连续形变而解开（见图4.1 (c)）.图4.2画出了如何做到这一点。

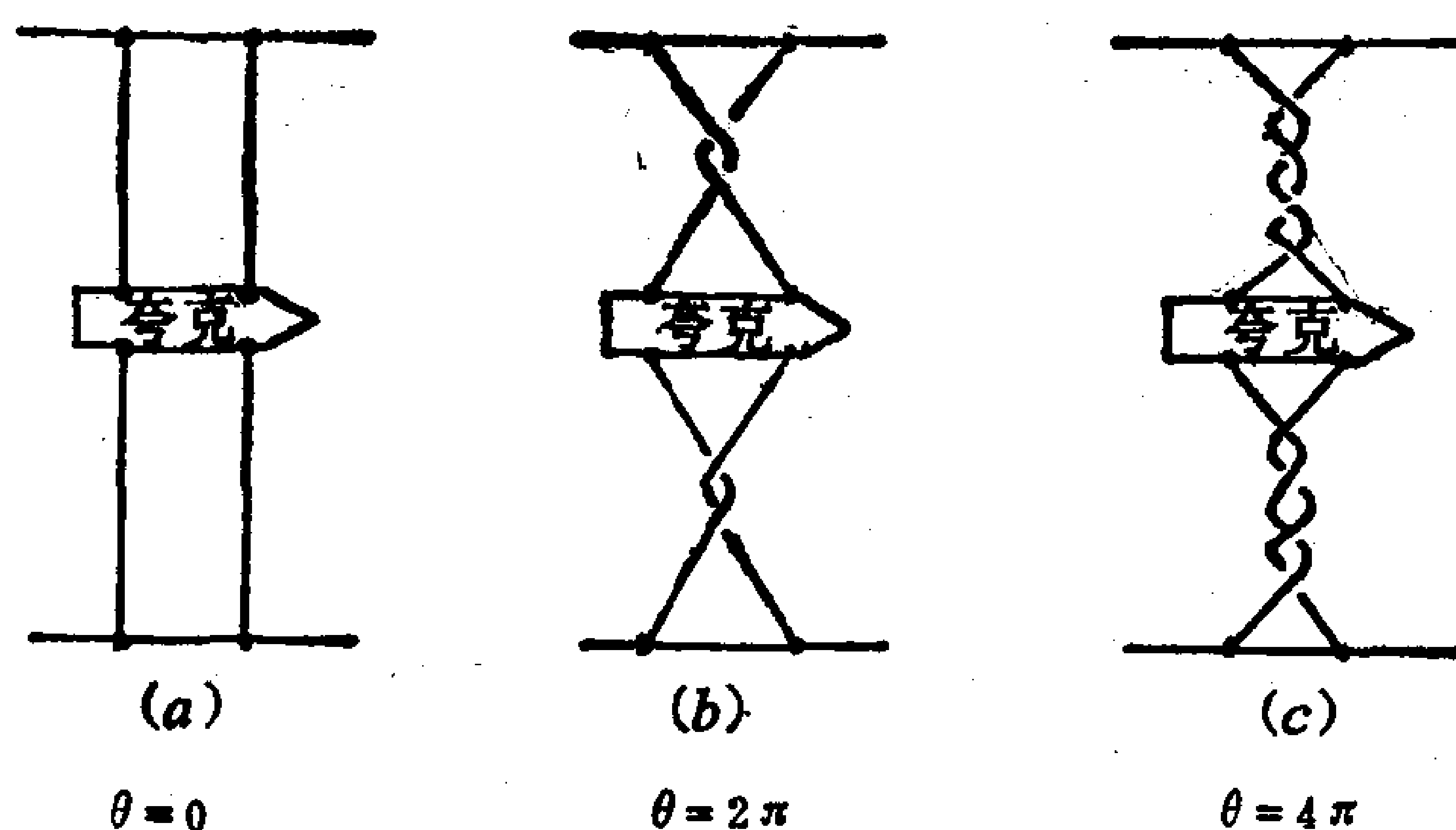


图4.1 (a) 用四条橡皮筋固定的牌子. (b) 牌子绕竖直轴转 2π 角. 橡皮筋上的扭结不可能通过橡皮筋的连续形变而解开. (c) 牌子转动 4π 角. 如下图所示，这种情况与 (a) 拓扑等价.

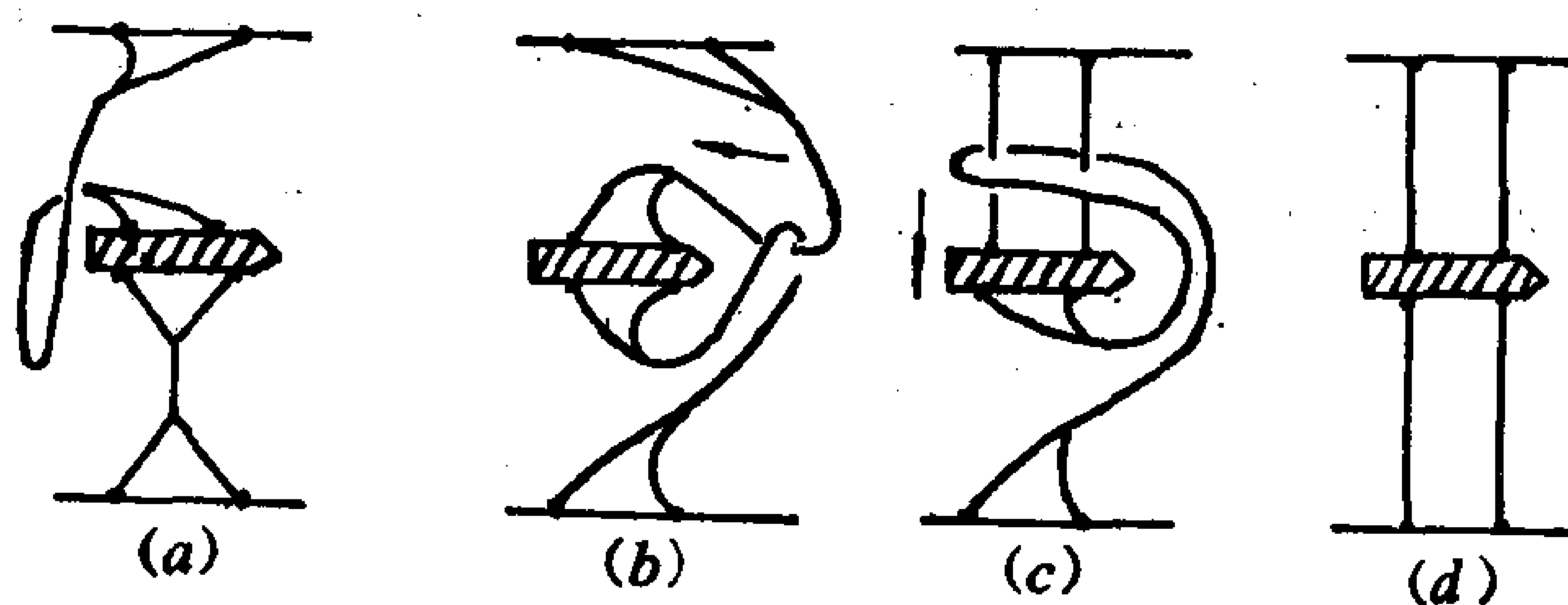


图4.2 如何把图4.1(c)中的橡皮筋的扭结复原

这个实验说明了 2π 的转动改变了转动物体和周围环境的关系，尽管该物体回到了它原来的取向。只有转动 4π 才真的什么也没有改变。$SU(2)$ 把转动 2π 与不转动区分开来，$O(3)$ 群则不去管橡皮筋而把这两种情况看做完全一样。更准确地说，$SU(2)$ 包含了一个中心（center）Z_2，它是一个与所有的群元都对易的子群（由±1两个元素组成）。而 $O(3)$ 群是把 Z_2 取做单位元得到的商群（factor group），即 $O(3)=SU(2)/Z_2$。

作为另一个例子，我们来研究 $U(1)$ 群。因为它的元素为 $e^{i\theta}$ 形式，它的流形是单位圆。这是一个紧流形，然而，却不是单连通的。有无穷多类闭路径，每条路径用环绕这个圆的次数来编号，带有不同绕数（winding number）的路径不可能通过连续的形变由一个变到另一个。覆盖群当然是单连通的，但它并不是紧致的，因为其流形是一条实线。

4. 一般性的评注

我们的讨论仅限于有限维么正矩阵群。上述的性质中有一些事实上是更普遍的。例如，由（4.11）导出的 C^c_{ab} 的完全反对称性，对任何紧致半单李群都正确。半单李群的普遍定义是其李代数不包含阿贝尔子代数的李群。嘉当(Cartan)定理说，一个李群当且仅当 $\det\|g_{ab}\|\neq 0$ 时才是半单的，其中 g_{ab} 由(4.8)式定义。因此，对于半单李群，g_{ab} 可以对角化，且通过重新标度 L_a 可以使 g_{ab} 的所有的本征值成为 $+1$ 或 -1。如果这个群是紧致的，这些本征值都可以为 $+1$，于是(4.11)式就可以成立。

正如下一节将要看到的，构造一个杨-密尔斯规范理论的充要条件是 C^c_{ab} 的完全反对称性和雅科比恒等式。这意味着那里的李群必须是紧致半单群，而且雅科比恒等式应当成立。对于有限维矩阵的李代数，雅科比恒等式是自动成立的，但对无穷维矩阵就可能不成立。

4.3 杨-密尔斯构造

1. 整体规范不变性

当我们把整体规范对称性扩大为定域规范不变性时就需要杨-密尔斯场。我们先从整体规范不变的体系的描述开始。

李群元素 U 的矩阵表示是 $U(1)$ 群元素 $e^{i\theta}$ 的推广。我们仍把它叫做（它所作用的表示空间的）规范变换。若U的矩阵元与时空无关，则 U 称为整体规范变换。否则，称之为定域规范变换。

有着整体规范不变性的场的体系（称为物质的体系）通常包含多分量场，我们用 $\Psi(x)$ 代表它们全体。各分量又分成一组组按照李群 G 的一定的不可约表示变换的多重态。一般说来，对于不同的多重态，这些不可约表示都是不同的。

一个多重态可以是玻色子，也可以是费米子。但玻色子场和费米子场不可能包括在同一个多重态里面，因为在量子理论中它们分别遵从对易规则和反对易规则，它们不可能由一种变换成另一种。

设拉格朗日密度为$\mathscr{L}_0(\Psi(x), \partial^\mu\Psi(x))$，则整体规范不变性是说

$$\mathscr{L}_0(U\Psi, \partial^\mu U\Psi) = \mathscr{L}_0(\Psi, \partial^\mu\Psi) . \qquad (4.24)$$

还有些要求来自于洛仑兹不变性：

(a) （自旋为$\frac{1}{2}$的）费米场 Ψ 是复的狄拉克旋量场。Ψ 的正则共轭是 $i\Psi^+$，这就是说，$\dot{\Psi}$ 在 L_0中以$i\Psi^+\dot{\Psi}$的形式出现。

(b) 玻色场 ϕ 可以是实的也可以是复的。ϕ 的正则共轭是 $\dot{\phi}^*$，这就是说 $\dot{\phi}$ 在 L_0 中以 $\dot{\phi}^*\dot{\phi}$形式出现。

一个复玻色场的两个独立的部分 ϕ 和 ϕ^* 可以用一对实场，即 ϕ 的实部和虚部所代替。相应地，G 元素的表示可以是复的形式

也可以是实的形式。作为例子，考虑一个组成 G 的 n 维不可约表示的复玻色场。独立的场有 $2n$ 个，它们可以表示为两个复的列矢量

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_n\end{pmatrix},\qquad \phi^*=\begin{pmatrix}\phi_1{}^*\\ \vdots\\ \phi_n{}^*\end{pmatrix}. \tag{4.25}$$

无穷小规范变换有如下形式

$$\begin{aligned}&\phi\to\phi+\delta\phi,\ \delta\phi=-i\omega\phi,\\ &\phi^*\to\phi^*+\delta\phi^*,\ \delta\phi^*=i\omega^T\phi^*,\end{aligned} \tag{4.26}$$

其中 ω 是李代数的元素

$$\omega\equiv\omega_a L_a, \tag{4.27}$$

其中 ω_a 都是无穷小实数，L_a 是表示 G 的生成元的 $n\times n$ 矩阵。ω^T代表ω 的转置（transpose）。

另一种做法是可以取独立的场为 ϕ 的实部和虚部

$$\phi=2^{-1/2}(A+iB)\ , \tag{4.28}$$

其中 A 和 B 都是 n 分量的实场。由（4.26）易见，在无穷小规范变换下

$$\begin{aligned}&A\to A+\delta A,\ \delta A=-\frac{i}{2}\ (\omega-\omega^T)\ A+\frac{1}{2}(\omega+\omega^T)B,\\ &B\to B+\delta B,\ \delta B=-\frac{1}{2}(\omega+\omega^T)\ A-\frac{i}{2}(\omega-\omega^T)B.\end{aligned} \tag{4.29}$$

这些结果还可以用一个 $2n$ 个分量的实场来表述

$$\Phi=\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix},$$

$$\Phi\to\Phi+\delta\Phi,\ \delta\Phi=\omega_a T_a\Phi, \tag{4.30}$$

$$T_a=-\begin{pmatrix}\mathrm{Im}L_a & \mathrm{Re}L_a\\ -\mathrm{Re}L_a & \mathrm{Im}L_a\end{pmatrix}\qquad (2n\times 2n\ 矩阵)\ .$$

作为一个例子来说明各种场如何出现在拉格朗日密度中，取

G 为同位旋群 $SU(2)$，并选取由下列多重态组成的物质场

$$\Psi = \{\pi, K, N, \overline{N}, \Sigma, \overline{\Sigma}\}. \tag{4.31}$$

这些场的变换性质在表 4.1 中给出。具有整体同位旋不变性的自由的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_0(\Psi, \partial^\mu\Psi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\pi_a\partial^\mu\pi_a + \partial_\mu K^*\partial^\mu K$$
$$+\overline{N}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)N + \overline{\Sigma}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\Sigma. \tag{4.32}$$

表 4.1 $SU(2)$ 多重态的一些例子

	玻色子		费米子	
场	$\pi=\begin{pmatrix}\pi_1\\\pi_2\\\pi_3\end{pmatrix}$	$K=\begin{pmatrix}K^0\\\overline{K}^0\end{pmatrix}$	$N=\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}$	$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma^+\\\Sigma^0\\\Sigma^-\end{pmatrix}$
			$\overline{N}=\begin{pmatrix}\overline{p}\\\overline{n}\end{pmatrix}$	$\overline{\Sigma}=\begin{pmatrix}\overline{\Sigma}^+\\\overline{\Sigma}^0\\\overline{\Sigma}^-\end{pmatrix}$
同位旋	1	1/2	1/2	1
生成元 L_a $(a=1,2,3)$	$(L_a)_{bc}=-i\varepsilon_{abc}$ 伴随表示	$L_a=\frac{1}{2}\tau_a$ 基础表示	$L_a=\frac{1}{2}\tau_a$	$(L_a)_{bc}=-i\varepsilon_{abc}$
附注	π_a $(a=1,2,3)$ 都是实数	K^0，$\overline{K}^0$ 都是复数	列矢量中的每一个成员都是一个有四个复分量的狄拉克场	

2. 定域规范不变性

在定域规范变换下

$$\Psi(x)\to U(x)\Psi(x),$$

$$\partial^\mu \Psi(x) \to U(x)\partial^\mu \Psi(x) + [\partial^\mu U(x)]\Psi(x). \qquad (4.33)$$

由于$\partial^\mu U(x) \neq 0$，$\partial^\mu \Psi$和$\Psi(x)$ 的变换方式不同，这就破坏了$\mathscr{L}_0$的不变性。要知道如何消去不需要的项 $(\partial^\mu U)\Psi$，只要考虑无穷小定域规范变换

$$\delta\Psi(x) = -i\omega(x)\Psi(x) \ , \qquad (4.34)$$

$$\delta[\partial^\mu \Psi(x)] = -i\omega(x)\partial^\mu \Psi(x) \ -i[\partial^\mu \omega(x)]\Psi(x),$$

其中$\omega(x)$ 是李代数的一个元素。定义协变微商

$$D^\mu \Psi(x) \ \equiv [\partial^\mu + igA^\mu(x)] \ \Psi(x) \ , \qquad (4.35)$$

其中 $A^\mu(x)$是李代数的一个元素

$$A^\mu(x) \equiv A^\mu_a(x) L_a. \qquad (4.36)$$

于是，我们需要 N 个规范场$A^\mu_a(x)(a=1,\cdots,N)$ ，通常称它们为杨-密尔斯场。在无穷小定域规范变换下

$$D^\mu \Psi \to [\partial^\mu + ig(A^\mu + \delta A^\mu)] \ (\Psi + \delta\Psi). \qquad (4.37)$$

要注意，$\delta\Psi = -i\omega\Psi$ 与 $A^\mu + \delta A^\mu$ 不对易，因为 ω 和 $A^\mu + \delta A^\mu$ 都是李代数的元素。$D^\mu\Psi$ 的变化为

$$\delta(D^\mu \Psi) = -i\omega D^\mu \Psi - ig\left\{ \delta A^\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu \omega + i[\omega, A^\mu]\right\}. \qquad (4.38)$$

为使 $D^\mu\Psi$ 与 Ψ 按相同方式变换，我们要求上式的最后一项为零，即

$$\delta A^\mu(x) = \frac{1}{g}\partial^\mu \omega(x) - i \ [\omega(x), A^\mu(x)] \ . \qquad (4.39)$$

把两边乘以 L_a 并取迹，然后利用 (4.12) 式，求得

$$\delta A^\mu_a(x) = \frac{1}{g}\partial^\mu \omega_a(x) + C_{abc}\omega_b(x) A^\mu_c(x), \qquad (4.40)$$

其中我们用到了 C_{abc} 的反对称性。这使得$\mathscr{L}_0$成为定域规范变换下的不变量。

为使场 A^μ_a 成为动力学客体，仍必须在$\mathscr{L}_0$中添加一项该场的自由的拉格朗日密度，它应是 A^μ_a 对时空微商的二次项，而且既是规范不变的又是洛仑兹不变的。仿照麦克斯韦场，可以尝试

定义一个场张量 $\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu$。但是在(4.40)变换下，它以复杂的方式变换。我们来寻找一个按照 G 的只由 C_{abc} 决定的不可约表示变换的场张量。显然，这个表示应该是伴随表示。下列张量满足我们的要求：

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) - gC_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\nu(x). \quad (4.41)$$

相应的李代数的元素 $F^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu}L_a$ 为

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) + ig[A^\mu(x), A^\nu(x)] \quad .(4.42)$$

在无穷小定域规范变换下，利用雅科比恒等式，由（4.42）式可以证明

$$\delta F^{\mu\nu}(x) = -i[\omega(x),\ F^{\mu\nu}(x)]\ ,$$

$$\delta F_a^{\mu\nu}(x) = C_{abc}\omega_b(x)F_c^{\mu\nu}(x). \quad (4.43)$$

由（4.6）式以及 C_{abc} 的反对称性，我们知道 $C_{abc} = -i(L_b)_{ac}$。因此

$$\delta F_a^{\mu\nu} = -i(\omega_b L_b)_{ac}F_c^{\mu\nu}. \quad (4.44)$$

这表明 $F_a^{\mu\nu}$ 按照伴随表示变换。

我们已经指出，雅科比恒等式和 C_{abc} 的完全反对称性是从（4.42）式导出（4.43）式的必要条件。反之，由（4.43）到（4.42）式，格拉肖和盖尔-曼[3]证明了同样的条件也是必要的。因此，$F_a^{\mu\nu}$ 唯一地由（4.42）式给出。

现在，我们取规范场的自由拉格朗日密度为 $-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu}$，它是规范不变的（见表4.2）。因子1/4是按照惯例约定的。

完整的定域规范不变的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} + \mathscr{L}_0(\Psi, D^\mu\Psi) \quad (4.45)$$

这就是杨-密尔斯的拉格朗日密度[注e]。使这一结构成为可能的

[注e] 这里不包括爱因斯坦的引力理论，它要求张量的规范场而不是矢量的规范场。其理由在于洛仑兹群是一个时空变换群，于是群生成元的指标也是时空指标。

必要且充分的条件是

(a) 雅科比恒等式成立；

(b) C_{abc} 是完全反对称的。

条件 (b) 要求 G 是一个紧致半单李群（见 4.2 节）。条件 (a) 对于有限维矩阵是自动满足的，而对无限维矩阵可能不成立。

在定义 (4.41) 中，仅有的任意参量，是 g 和与 G 中包含的各单李群相应的 C_{abc} 的子集之间的相对归一常数。一个单李群的 C_{abc} 的任意性已由 (4.12) 的约定而固定下来了。参数 g 称为**规范耦合常数** (gauge coupling constant)，它把规范场和物质场之间的标度 (scale) 固定下来。对于一个单纯群的 G，可以重新定义规范场为

$$\tilde{A}_a^\mu(x) \equiv g A_a^\mu(x). \tag{4.46}$$

从而把 g 吸收进去。如果 G 不是一个单纯群，则每一个单纯子群和每个 $U(1)$ 子群都有一个独立的耦合常数。通常，并不是所有这些耦合常数都可以通过重新标度规范场而同时吸收掉。从现在起，我们假定 G 是单纯的（且不是 $U(1)$），推广到其它情况是直接的。

有限的定域规范变换可以很容易地由无穷小变换得到。结果在表 4.2 中给出。要注意 $F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu}$ 正比于 $\mathrm{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$，而后者显然是规范不变的。

表 4.2　定域规范变换

无穷小变换

$$\omega(x) \equiv \omega_a(x) L_a$$

$$\delta\Psi_i = -i\omega_a(x)(L_a)_{ij}\Psi_j(x)$$

$$\delta A_a^\mu(x) = \frac{1}{g}\partial^\mu \omega_a(x) + C_{abc}\omega_b(x) A_c^\mu(x)$$

$$\delta F_a^{\mu\nu}(x) = C_{abc}\omega_b(x) F_c^{\mu\nu}(x)$$

$$\delta\Psi(x) = -i\omega(x)\Psi(x)$$

$$\delta A^{\mu}(x)=\frac{1}{g}\partial^{\mu}\omega(x)-i[\omega(x),A^{\mu}(x)]$$

$$\delta F^{\mu\nu}(x)=-i[\omega(x),F^{\mu\nu}(x)]$$

有限的变换

$$U(x)\equiv e^{-i\omega(x)}$$

$$\Psi(x)\to U(x)\Psi(x)$$

$$A^{\mu}(x)\to U(x)A^{\mu}(x)U^{-1}(x)-\frac{i}{g}U(x)\partial^{\mu}U^{-1}(x)$$

$$F^{\mu\nu}(x)\to U(x)F^{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)$$

$A^{\mu}(x)$ 的纯规范形式为

$$A^{\mu}(x)=-\frac{i}{g}U(x)\partial^{\mu}U^{-1}(x)\text{（纯规范）},\quad(4.47)$$

它是$U(1)$ 群情况中 $\partial^{\mu}\omega$ 的推广。易证，(4.47) 式给出 $F^{\mu\nu}=0$。矩阵 $U(x)$并不一定能由 $U=1$ 通过连续变换求得。和 $U(1)$ 群的情况一样，这里也出现不同的纯规范类。

为了把 (4.47) 式用 $\omega=i\ln U$表示，我们注意到 $\omega(x)$ 的无穷小变化引起$U(x)$ 的变化为[注]

$$dU\equiv e^{-i(\omega+d\omega)}-e^{-i\omega}=\int_0^1 dte^{-(1-t)i\omega}(-id\omega)e^{-it\omega}.\quad(4.48)$$

利用这个结果连同 (4.47) 式一起得到

$$A^{\mu}(x)=-\frac{1}{g}\int_0^1 dte^{-it\omega(x)}[\partial^{\mu}\omega(x)]e^{it\omega(x)}\text{（纯规范）},\quad(4.49)$$

4.4 杨-密尔斯场的性质

1. 电场和磁场

我们通过指定反对称张量（或 6-矢量）$F^{\mu\nu}$ 有如下分量

[注] 利用著名的公式

$$e^{A+B}=e^{A}+\int_0^1 dte^{(1-t)A}Be^{tA}+\cdots$$

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E^1 & -E^2 & -E^3\\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2\\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1\\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

或

$$E^k=F^{k0} \qquad (k=1,2,3) \tag{4.51}$$

$$B^k=-\frac{1}{2}\varepsilon^{kij}F^{ij},\quad F^{ij}=-\varepsilon^{ijk}B^k$$

来定义电场$\boldsymbol{E}\equiv\boldsymbol{E}_aL_a$和$\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{B}_aL_a$，它们都是李代数的元素。借助于$A^\mu=(A^0,\boldsymbol{A})$，有

$$E^k=\partial^kA^0-\partial^0A^k+ig[A^k,A^0], \tag{4.52}$$

$$B^k=(\partial^lA^m-\partial^mA^l)-ig[A^l,A^m] \quad (k,l,m\text{循环}),$$

这些矩阵不是规范不变的，在群元U的作用下，要作一个么正变换（见表4.2）。我们还可写成

$$\boldsymbol{E}_a=-\nabla A_a^0-\frac{\partial\boldsymbol{A}_a}{\partial t}-gC_{abc}\boldsymbol{A}_bA_c^0, \tag{4.53}$$

$$\boldsymbol{B}_a=\nabla\times\boldsymbol{A}_a+\frac{1}{2}gC_{abc}\boldsymbol{A}_b\times\boldsymbol{A}_c.$$

注意到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_a=\frac{1}{2}gC_{abc}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_b\times\boldsymbol{A}_c), \tag{4.54}$$

它表明磁荷密度可能存在。总磁荷等于在空间无穷远处的一个面积分，有一些特解（磁单极解）(monopole) 这个值不为零。我们将在第五章讨论它们。

2. 对偶张量

定义对偶张量为

$$\bar{F}_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{4.55}$$

作为μ,ν的反对称张量，它的形式为：

$$
\tilde{F}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -B^1 & -B^2 & -B^3\\ B^1 & 0 & -E^3 & E^2\\ B^2 & E^3 & 0 & -E^1\\ B^3 & -E^2 & E^1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.56}
$$

它可由 $F^{\mu\nu}$ 通过把$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{E}$互换而得到。下面是一些洛仑兹不变量：

$$
\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}_a\cdot\boldsymbol{B}_a-\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_a)\ (\text{标量}),
$$

$$
\frac{1}{4}\tilde{F}_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu}=-\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{B}_a\ (\text{赝标量}). \tag{4.57}
$$

在阿贝尔情况下，不存在磁流可以从恒等式 $\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}=0$ 看出来，该式没有动力学内容，而只是定义 $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ 的直接推论。在本章所讨论的非阿贝尔情况下，利用雅科比恒等式，由(4.55)可以证明

$$
\partial^\mu\tilde{F}_{\mu\nu}+ig[A^\mu,\tilde{F}_{\mu\nu}]\equiv 0,
$$

$$
\partial^\mu F_{a\mu\nu}-gC_{abc}A_{b\mu}\tilde{F}_c^{\mu\nu}\equiv 0. \tag{4.58}
$$

我们还可以写成

$$
D^\mu\tilde{F}_{\mu\nu}\equiv 0, \tag{4.59}
$$

其中

$$
D^\mu=\partial^\mu+ig[A^\mu,\ ]. \tag{4.60}
$$

这是适用于伴随表示的协变微商。

3. 规范群的路径表示 (path representation)

当存在杨-密尔斯场时，在每一个时空点都可以独立地选取物质场内部对称空间的坐标架。在 x 点和 $x+dx$ 点之间，定域坐标架的改变与 $A^\mu(x)$ 的定域规范变换有关。物质场体系并不受这种定域坐标架选择的影响，即在局部范围内，$\Psi(x)$ 与 $U(x)\Psi(x)$ 在物理上是不可区分的。同样，$A^\mu(x)$ 的定域规范变换也没有什么物理意义。

当没有内部对称性时，$\Psi(x)$ 是只有一个实分量的场。那

时，说 $\Psi(x)$ 在 x 和 $x+dx$ 之间不改变，意指 $dx_\mu\partial^\mu\Psi(x)=0$. 如果 $\Psi(x)=e^{-i\alpha(x)}|\Psi(x)|$ 是一个与 $U(1)$ 规范场耦合的复场，因而其相位没有物理意义，那么，只要满足 $dx_\mu\partial^\mu|\Psi(x)|=0$，或 $dx_\mu[\partial^\mu+i\gamma^\mu a(x)]\Psi(x)=0$，则对一切物理应用而言，在 dx 这一段，$\Psi(x)$ 就是常数。在这种情况下，我们就说 $\Psi(x)$ 由 x 到 $x+dx$ 做平行移动，而且利用 $U(1)$ 规范场可以把上述条件改写为

$$dx_\mu D^\mu\Psi(x)\equiv dx_\mu[\partial^\mu+igA^\mu(x)]\Psi(x)=0. \qquad (4.61)$$

在杨-密尔斯场情况下，我们仍采用平行移动的这一定义，只是取 $A^\mu(x)=A_a^\mu(x)L_a$。内部空间中定域坐标架由表示李代数元素 $A^\mu(x)$ 的矩阵所规定，这就是说，当矩阵 L_a 选定以后，由 $A_a^\mu(x)$ 来规定。

假定 $\Psi(x)$ 沿着一条由参数 $0\leqslant s<1$ 确定的路径 P 做平行移动。那时，在 P 的任何一点 x 有

$$\frac{dx_\mu}{ds}[\partial^\mu+igA^\mu(s)]\Psi(s)=0, \qquad (4.62)$$

其中 $\Psi(x)\equiv\Psi(x(s))$，$A^\mu(s)\equiv A^\mu(x(s))$。这个方程的解是

$$\Psi(s)=T\left[\exp\left(-ig\int_0^s ds'(dx^\mu/ds')A_\mu(s')\right)\right]\Psi(0), \qquad (4.63)$$

其中 T 是一个“路径编序（path-ordering）算符”，它规定了在上述指数函数做幂级数展开时，每一项中的矩阵 $A_\mu(s')$ 要按照 s' 增加的次序排列。于是，与每一条指定了方向的路径 P 相对应有一个矩阵

$$\Omega(P)\equiv T\exp\left(-ig\int_P dx^\mu A_\mu(x)\right). \qquad (4.64)$$

它是 G 的一个元素的路径相关表示（path-dependent representation），这是一种特殊的表示，它由李代数的元素 $A^\mu(x)=A_a^\mu(x)L_a$ 中 L_a 的表示所决定。$\Omega(P)$ 的意义在于它是使 $\Psi(x_0)$ 沿 P 到 $\Psi(x_1)$ 的规范变换

$$\Psi(x_1)=\Omega(\mathrm{P})\Psi(x_0),\qquad(4.65)$$

其中 x_0 和 x_1 是 P 的两个端点：$x(0)=x_0$，$x(1)=x_1$。

在点态（point-wise）规范变换 $U(x)$ 作用下，$\Omega(\mathrm{P})$ 作如下变换

$$\Omega(\mathrm{P})\longrightarrow\Omega'(\mathrm{P}),$$

$$\Omega'(\mathrm{P})=U(x_1)\Omega(\mathrm{P})U^{-1}(x_0).\qquad(4.66)$$

由此可以导出，对于闭合路径 C，$\mathrm{Tr}\Omega(\mathrm{C})$ 是规范不变的。

证明：设 $\Psi'(x)=U(x)\Psi(x)$。$\Omega'(\mathrm{P})$ 的定义为

$$\Psi'(x_1)=\Omega'(\mathrm{P})\Psi'(x_0),\qquad(4.67)$$

或
$$U(x_1)\Psi(x_1)=\Omega'(\mathrm{P})U(x_0)\Psi(x_0),$$

$$U(x_1)\Omega(\mathrm{P})\Psi(x_0)=\Omega'(\mathrm{P})U(x_0)\Psi(x_0),$$

$$U(x_1)\Omega(\mathrm{P})=\Omega'(\mathrm{P})U(x_0)$$（因为 $\Psi(x_0)$ 是任意的）。

所以 $U(x_1)\Omega(\mathrm{P})U^{-1}(x_0)=\Omega'(\mathrm{P})$。 ∎

对于 x 处的面积为 $dx^\mu dy^\nu$ 的无穷小闭合路径

$$\Omega(dxdy)=1-igdx^\mu dy^\nu F_{\mu\nu}(x).\qquad(4.68)$$

证明：该矩形的各边记为 $n=1,2,3,4$，如图 4.3 所示。沿 x 处任何无穷小的 dx，我们有（在二级近似下）

$$\Omega(dx)=1-igdx^\mu A_\mu(x)-\frac{1}{2}g^2dx^\mu dx^\nu A_\mu(x)A_\nu(x).$$

设

$$\lambda_n\equiv\int_{第n条边}dx^\mu A_\mu(x).$$

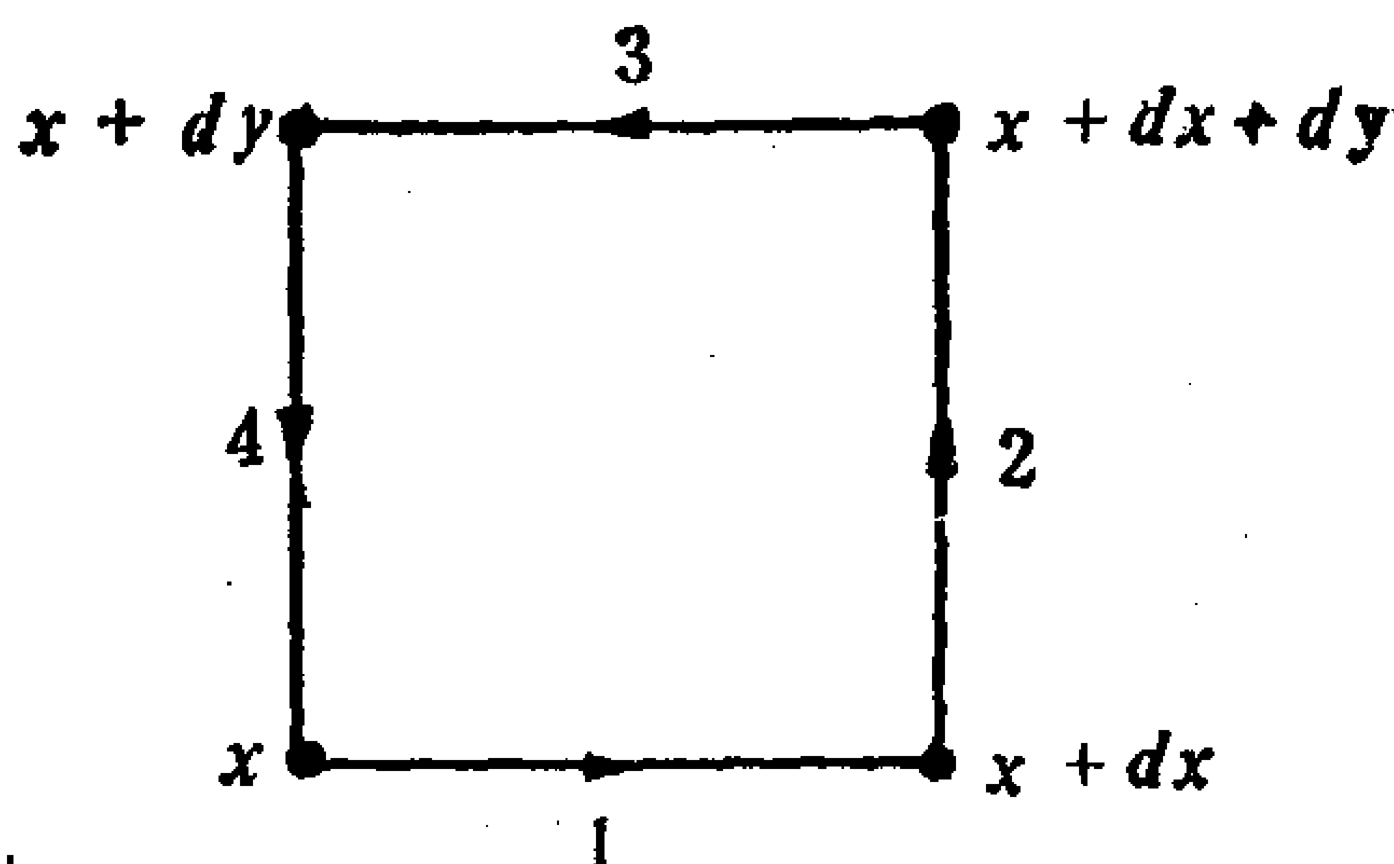


图4.3 时空中一个无穷小矩形

根据 Ω 的群的性质

$$\begin{aligned}\Omega(dxdy)&=\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4\\&=1-ig(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\\&\quad-g^2[\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\\&\quad\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4\\&\quad+\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2)].\end{aligned}$$

边的积分计算的例子如下

$$\lambda_1+\lambda_3=\left(\int_x^{x+dx}-\int_{x+dy}^{x+dx+dy}\right)dz^\nu A_\nu(z)$$

$$=dy^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int_x^{x+dx}dz^\nu A_\nu(z)=dy^\mu dx^\nu\partial_\mu A_\nu(x),$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=dx^\mu dy^\nu(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu),$$

$$g^2[\lambda_1\lambda_2+\cdots]=-g^2dx^\mu dy^\nu[A^\mu(x),\ A^\nu(x)].$$

因此

$$\Omega(dxdy)=1-igdx^\mu dy^\nu F_{\mu\nu}(x)$$ ▮

知道了所有路径 P 的 $\Omega(P)$，通过对 P 的一个端点求微商，可以确定 $A_a^\mu(x)$。经典规范理论完全可以借助 $\Omega(P)$ 表述[4]，但正则量子化仍要在 $A_a^\mu(x)$ 的量子化基础上建立起来，我们将在第八章讨论这个问题。对于所有闭合路径 C 的 $\Omega(C)$ 的知识，无须赘言，刚好包含了经典规范场的一切物理信息[5]。

为说明 $\Omega(P)$ 的实际用处，我们来证明：$A_a^\mu(x)$ 的任何一个时空分量都可以借助连续的定域规范变换变成零。当其空间分量为零时，称 $A_a^\mu(x)$ 处在轴规范 (axial gauge)。当其时间分量为零时，称 $A_a^\mu(x)$ 处在时间规范 (temporal gauge)。假定我们希望使 $A_a^0(x)=0$。设 P_x 是一条沿直线由 $x_0=(0,\boldsymbol{x})$ 指向 $x=(t,\boldsymbol{x})$ 的路径。考虑

$$\Omega(P_x)=\mathrm{Texp}\left(-ig\int_0^t dt'A^0(t',\ \boldsymbol{x})\right),\quad(4.69)$$

显然，对于 $x=x_0$，$\Omega(P_x)=1$。若 $A_a^0(x)$ 不是零，做连续的定域规范变换

$$U(x)=[\Omega(P_x)]^{-1},\qquad U(x_0)=[\Omega(P_{x_0})]^{-1}=1.\quad(4.70)$$

那时，按照 (4.66) 式

$$\Omega(P_x)\longrightarrow U(x)\Omega(P_x)U^{-1}(x_0)=\Omega^{-1}(P_x)\Omega(P_x)=1.\quad(4.71)$$

它意味着 $A_a^0(x)=0$。 ▮

4.5 正则形式

1. 运动方程

我们考虑经典拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu} + (D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - V(\phi) + \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi, \tag{4.72}$$

其中 ϕ 是一组复玻色场，ψ 是一组费米场，m 是常数质量矩阵。这些场形成规范群 G 的几组不可约表示。玻色子自作用项是规范不变的：

$$V(\phi) = V(U\phi). \tag{4.73}$$

为使其量子理论可重整，$V(\phi)$ 必须是 ϕ 和 ϕ^* 的不高于四次的多项式。可重整的这一同样的要求排除了费米子的自作用。除 $V(\phi)$ 以外，所有的相互作用都由规范场 A_a^μ 传递，它只通过 $D^\mu\phi$ 和 $D^\mu\psi$ 与 ϕ 和 ψ 耦合。这里，我们的讨论只限于经典理论，而把量子化留给稍后的几章。

场 ϕ 和 ϕ^* 可以用与之等价的一组 $\mathrm{Re}\phi$ 和 $\mathrm{Im}\phi$ 来代替。唯一没有被（4.27）包括的，是按照伴随表示变换的 N 个实场 ϕ_a 的情况，如果愿意的话，可以把它们的自由拉格朗日密度 $\frac{1}{2}D^\mu\phi_a D^\mu\phi_a$ 添加进去。我们还没有考虑其普遍形式为 $\psi_i\phi_j\psi_k$ 的可能的汤川（Yukawa）耦合，其中的 i，j，k 是场分量的指标。可允许的 i，j，k 的组合依赖于群 G 以及各个场所属的表示。正如将在第六章见到的，这些汤川耦合可能对费米子质量有贡献。

还应指出，$\mathscr{L}$ 可以是在比 G 更大的整体群下不变，但只有 G 被规范化了。例如，在 $G = SU(2)$ 时，取玻色子场由一个三

重态$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$和一个二重态$\{K_1, K_2\}$组成，且取

$$V=a(\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2)+b(K_1^*K_1+K_2^*K_2).$$

这个势在ϕ和K的独立的$SU(2)$变换下不变。因此整体对称群是$SU(2)\times SU(2)$，但被规范化的对称性是ϕ和K同时变换的$SU(2)$群。

我们的体系中独立的场和它们的正则共轭量在表4.3中给出。运动方程是

$$D_\mu D^\mu\phi=-\frac{\partial V}{\partial\phi^*},\qquad (D_\mu D^\mu\phi)^*=-\frac{\partial V}{\partial\phi},\tag{4.74}$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu-m)\psi=0,\qquad i(D_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu+m\bar{\psi}=0,\tag{4.75}$$

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu}-gC_{abc}A_{b\mu}F_c^{\mu\nu}=j_a^\nu,\tag{4.76}$$

其中j_a^ν是物质场的流

$$\begin{aligned}j_a^\nu&=-ig[(D^\nu\phi)^*L_a\phi-\phi^*L_a(D^\nu\phi)]+(\bar{\psi}\gamma^\nu L_a\psi)\\&=-ig\,(\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\nu}L_a\phi)-g^2A_b^\nu\phi^*\{L_a,\ L_b\}\phi+(\bar{\psi}\gamma^\nu L_a\psi).\end{aligned}\tag{4.77}$$

这个流j_a^ν是规范不变的，但不是守恒的。另一方面，$j_a^\nu+gC_{abc}A_{b\mu}F_c^{\mu\nu}$是守恒的但不是规范不变的。

我们可以把（4.76）改写成

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}+ig[A_\mu,\ F^{\mu\nu}]=j^\nu,\tag{4.78}$$

或

$$D_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu,\tag{4.79}$$

其中D^μ是（4.60）中定义的协变微商，而

$$j^\nu\equiv j_a^\nu L_a.\tag{4.80}$$

我们集中注意力于规范场，因为物质场的行为，除了稍后将单独讨论的由$V(\phi)$引起的可能的对称性自发破缺以外，我们都是熟悉的。

（4.76）式的三维矢量形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_a+gC_{abc}\boldsymbol{A}_b\cdot\boldsymbol{E}_c=j_a^0,\tag{4.81}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}_a-\frac{\partial\boldsymbol{E}_a}{\partial t}+gC_{abc}(A^0{}_b\boldsymbol{E}_c+\boldsymbol{A}_b\times\boldsymbol{B}_c)=\boldsymbol{j}_a,\quad(4.82)$$

其中 $\boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{B}_a$ 由 (4.53)式定义。这些方程是麦克斯韦方程组的推广，但是不能只用 $\boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{B}_a$ 表示。

方程 (4.81) 式是高斯定律的推广，它不包含$\frac{\partial A_a{}^0}{\partial t}$。这样我们就可以利用此式，借助于别的场把 $A_a{}^0$ 消掉。从 $A_a{}^0$ 的正则共轭恒为零（表 4.3）也可以看出这种做法应当是可能的。由这个结果显然可见，总可通过连续的规范变换把 $A_a{}^0$ 变为零（见 4.4 节）。如果引入某一初始规范条件，那么（4.81）就是对 $A_a{}^0$ 初值的约束，因而，从动力学上保证了规范条件是不变的。利用 $A_a{}^0$，可以把（4.81）改写成

$$\nabla^2A_a{}^0+M_{ab}A_b{}^0+N_a=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_a)+gC_{abc}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_b)A_c{}^0,\quad(4.83)$$

其中

$$M_{ab}=2gC_{abc}\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla+g^2C_{amn}C_{nlb}\boldsymbol{A}_m\cdot\boldsymbol{A}_l,\quad(4.84)$$

$$N_a=gC_{abc}\boldsymbol{A}_b\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}_c}{\partial t}-j_a{}^0.$$

如果在一个特定的时刻，选库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}_a=0$，那么，条件

$$\nabla^2A_a{}^0+M_{ab}A_b{}^0+N_b=0,\quad(4.85)$$

表 4.3 场和正则共轭量

	场	正则共轭
规范场	$A_a^\nu(x)$	$-F_a^{\nu0}(x)=\begin{cases}-E_a^k(x) & (\nu=k=1,2,3)\\0 & (\nu=0)\end{cases}$
标量场	$\phi(x)$	$[D^0\phi(x)]^*\equiv\pi(x)$
	$\phi^*(x)$	$D^0\phi(x)\equiv\pi^*(x)$
旋量场	$\psi(x)$	$i\psi^+(x)$

保证$\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_a)/\partial t=0$，结果使库仑规范在所有的时间都被保持下来。在$U(1)$群情况下，(4.85)式的类似关系式是$\nabla^2 A_0=-j^0$，它的通解导致库仑势。在目前的情况下，由于$M_{ab}$和$N_a$都依赖于$\boldsymbol{A}_a$，所以(4.85)与(4.82)构成耦合方程组。这使它大为复杂，至今还没有能找到通解。

2. 哈密顿量

利用标准做法，$\mathscr{H}=p\dot{q}-\mathscr{L}$（其中$q$是独立的场量，$p$是它的正则共轭量），可以求得哈密顿密度

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}_a\cdot\boldsymbol{B}_a-\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_a)-\boldsymbol{E}_a\cdot\dot{\boldsymbol{A}}_a+\pi\dot{\phi}+\pi^*\dot{\phi}^*$$

$$-(D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi)+V(\phi)+\overline{\psi}\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{D}+m\beta\right)\psi. \quad (4.86)$$

第二项可以改写成

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{E}_a\cdot\dot{\boldsymbol{A}}_a&=\boldsymbol{E}_a\cdot(\boldsymbol{E}_a+\nabla A_a{}^0+gC_{abc}\boldsymbol{A}_b A_c{}^0)\\&=\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_a+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_a A_a{}^0)-(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_a)A_a{}^0\\&\quad+gC_{abc}(\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{A}_b)A_c{}^0.\end{aligned} \quad (4.87)$$

接下去的几项可以改写为

$$\begin{aligned}&\pi\dot{\phi}+\pi^*\dot{\phi}^*-(D^\mu\phi)^*(D_\mu\phi)\\&=\pi(\pi^*-igA_0\phi)+\pi^*(\pi+igA_0\phi^*)-\pi\pi^*+(\boldsymbol{D}\phi)^*\cdot(\boldsymbol{D}\phi)\\&=\pi^*\pi+(\boldsymbol{D}\phi)^*\cdot(\boldsymbol{D}\phi)+ig(\pi^*A_0\phi^*-\pi A_0\phi).\end{aligned} \quad (4.88)$$

因此

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}_a\cdot\boldsymbol{B}_a+\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_a)+\pi^*\pi+(\boldsymbol{D}\phi)^*\cdot(\boldsymbol{D}\phi)$$

$$+V(\phi)+\overline{\psi}\left(\frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{D}+m\beta\right)\psi+X, \quad (4.89)$$

其中

$$X=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_a A_a{}^0)-(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_a)A_a{}^0+gC_{abc}\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_b A_c{}^0$$

$$+ig(\pi^*\boldsymbol{A}\cdot\phi^*-\pi A_0\phi). \quad (4.90)$$

利用（4.81）和（4.77），我们发现，上式第一项之后的所有的项彼此抵消。因此

$$X=\nabla\cdot(E_aA_a^0),\tag{4.91}$$

在对全空间求积分时，我们可以丢弃这一项。因此，总哈密顿量即总能量为

$$H=\int d^3x\left[\frac{1}{2}\ (B_a\cdot B_a+E_a\cdot E_a)+\pi^*\pi+(D\phi)^*\cdot(D\phi)\right.$$
$$\left.+V(\phi)\ +\bar{\psi}\ \left(\frac{1}{i}\alpha\cdot D+\ m\beta\right)\psi\right].\tag{4.92}$$

独立的规范场量是A_a，E_a是它的正则共轭量，而B_a是由（4.53）式给定的A_a的函数。所有对A_a^0的依赖都被消去了，这个哈密顿量显然是定域规范不变的。人们可以这样把规范完全固定下来，使得对每个a，A_a的三个场量中只有两个是独立的。在规范固定以后，H的形式与规范选取有关。

通过引入通常的对易或反对易关系可以实现ϕ和ψ的量子化，我们不打算研究它们。然而，A_a^μ的量子化由于必须固定规范而复杂化了，我们把它推迟到第八章讨论。

最后，我们要提及的是该量子理论的彭加勒不变性必须通过由场算符构造彭加勒群的无穷维幺正表示来证明。彭加勒群是一个李群，它的代数有十个生成元，即能量，动量，角动量和洛仑兹推动(Lorentz boosts)。施温格[6](Schwinger)曾部分地解决了这个问题。但充分考虑非阿贝尔特点的完全解仍然没有找到。特别是，有一些有关角动量算符的表示的新奇特点，仍需充分地加以理解[7]。

4.6 对称性自发破缺

1. 小群（little group）

在现在的这个模型中，对称性自发破缺是指某些自旋为零的

场（希格斯场）有非零的真空值。这种破缺如何发生，完全依赖于$V(\phi)$的形式。我们假定较高自旋的场真空值都是零，因为否则洛仑兹不变性也要成为自发破缺的，这显然与实验不符。正如我们在第三章指出的，借助于希格斯场来处理对称性自发破缺给我们提供了一种方便的数学描述方法，但实际上很可能证明希格斯场只不过是一种唯象的工具。这里，我们用经典的方法来处理这个问题，而把量子修正的讨论放到第十章。

设所有的希格斯场一起用ϕ代表，并假定$V(\phi)$在$\phi=\rho$处有一最小值，这个最小值取为零，即

$$\begin{aligned} &V(\rho)=0, \\ &V'(\rho)=0, \\ &V''(\rho)>0. \end{aligned} \tag{4.93}$$

对称性自发破缺在$\rho\neq 0$时发生。那时，真空解（最低能量解）为

$$\begin{aligned} &\phi(x)=\rho, \\ &A_a{}^\mu(x)=0. \end{aligned} \tag{4.94}$$

因为它显然满足运动方程，且有着最低的可能能量值。

恰如$U(1)$群的情况一样，ρ不是唯一的，因为$U(x)\rho$与ρ等价。但与$U(1)$群不同的是，这里并非所有的$U(x)\rho$都是相互独立的。为了强调这一点，让我们看一个例子。

取$G=SU(2)$，而$\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$按伴随表示变换。设

$$V(\phi)=\lambda(\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2-a^2)^2.$$

则$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3)$是任何一个满足

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=a^2$$

的三维矢量。即，$\boldsymbol{\rho}$是一个其尖端位于半径为a的球面上的三维矢量。因此，对于该球面绕$\boldsymbol{\rho}$的任何一个转动U，有$U\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}$。选$x_3$轴沿$\boldsymbol{\rho}$方向。那时，保持$\boldsymbol{\rho}$不变的最普遍的转动是$[\exp(-i\omega L_3)]\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}$或$L_3\boldsymbol{\rho}=0$。这样，真空解在由$L_3$生成的

$SU(2)$ 的 $U(1)$ 子群下是不变的。这时，称 $SU(2)$ 对称性自发地破缺为 $U(1)$ 对称性。

现在回到普遍情况，让我们规定 ρ 是一个常矢量（即，ρ 的所有的分量都不依赖 x）。这是可能的，因为 $V(\rho)$ 不显含 x。ρ 仍不是唯一的，因为当 U 是整体规范变换时，$U\rho$ 与 ρ 同样适用。G 中保持 ρ 不变的所有的元素集合 U 组成 G 的一个子群（这是显然的）．由于按假设 $\rho\neq 0$，这个子群不会是 G 本身，而是它的真子群（proper subgroup）．保持 ρ 不变的最大的子群 H 称为关于 ρ 的小群。小群的李代数由 G 的李代数 $\{L_a\}$ 的子集 $\{l_a\}$ 组成，它满足

$$[l_\alpha,\ l_\beta] = iC_{\alpha\beta\gamma}l_\gamma. \tag{4.95}$$

在 H 的无穷小元素作用下，

$$\delta\rho = -i\omega_a l_a\rho = 0. \tag{4.96}$$

由于 $\{\omega_a\}$ 是任意的，我们有

$$l_a\rho = 0. \tag{4.97}$$

我们称对称性 G 自发破缺成 H。

G 的元素分成许多等价类（equivalence class），它们都是G 对于 H 的旁集（coset），即 H, U_1H, U_2H, $\cdots$，其中 U_iH 是旁集$\{U_iu|\ U_i\in G, u\in H\}$．$U\rho$ 中独立的矢量是 $\rho, C_1\rho, C_2\rho, \cdots$，其中$C_i\in U_iH$。旁集的集合，用$G/H$ 表示，一般不是一个群。当且仅当 H 是 G 的不变子群（normal subgroup）（即 $UH=HU$）时，它才是一个群．这时 G/H 称为商群（factor group），满足乘法规则 $(U_1H)(U_2H)=(U_1U_2)H$。

G 的不属于$\{l_a\}$ 的生成元，按定义，不能使 ρ 变为 0。这样，我们可以把$\{L_a\}$分成两个不相交的子集

$$\begin{aligned}&\{L_a\}=\{L_j, l_a\},\\ &L_j\rho\neq 0\ \ (j=1,\cdots,\ K)\ ,\\ &l_a\rho=0\quad\ (\alpha=1,\cdots,\ N-K).\end{aligned} \tag{4.98}$$

$\{L_j\}$与$\{l_a\}$的选取依赖于对ρ的特殊规范，因此是不唯一的。但是在每一个集合中生成元的数目是规范不变的，因为

$$l_a\rho = 0 \Longrightarrow [U(x)l_aU^{-1}(x)]U(x)\rho = 0. \qquad (4.99)$$

当且仅当$\{l_a\}$是一个不变子代数（normal subalgebra）时，生成元$\{L_j\}$（$j=1,\cdots,K$）才生成一个群。

接下去，按照（4.18）式，用实的反对称矩阵

$$T_j = -iL_j \quad (j=1,\cdots,K), \qquad (4.100)$$
$$t_a = -il_a \quad (a=1,\cdots,N-K),$$

表示这些生成元将是很方便的。我们还取ρ有R个实分量，结果使表示的矢量空间是R维的实矢量空间。这个空间的标积由下式表示

$$(f,Og) = \sum_{n=1}^{R}\sum_{m=1}^{R} f_n O_{nm} g_m. \qquad (4.101)$$

实对称矩阵$(T_i\rho, T_j\rho)$有正定的本征值。因此，$T_i\rho$（$i=1,\cdots,K$）都是独立的矢量，它们张成R维表示矢量空间的K维子空间。因此，小群H是非空（non-empty）的必要条件是

$$R-K>0. \qquad (4.102)$$

我们把$T_i\rho$（$i=1,\cdots,K$）张成的K维空间称为戈德斯通空间，它的$R-K$维补空间称为希格斯空间。

对于紧致规范群G及其表示矢量空间中的任何一个矢量ϕ，总有一个规范变换U_0使$U_0\phi$与戈德斯通空间正交，即

$$(T_j\rho,\ U_0\phi) = 0 \qquad (j=1,\cdots,K). \qquad (4.103)$$

我们称$U_0\phi$是处在幺正规范中。U_0的存在可以证明如下[8]。

对于给定的ρ和ϕ，考虑由下式定义的G到实数域的映射

$$f(U) = (\rho, U\phi).$$

由于G是紧致的，$f(U)$的值取在一个实的紧集内。因此$f(U)$有极值。设$f(U_0)$是一个极值。U_0附近U的小的变分给出

$$\delta f \equiv f(U_0+\delta U) - f(U_0) = 0.$$

群元素 U 的任何一种改变都可以写成用另一个群元素左乘。因此，我们可以写成

$$\delta U = \omega_a T_a U_0,$$

其中 ω_a 是任意的数。于是，

$$0 = \delta f = (\rho, \omega_a T_a U_0 \phi) = \omega_j (\rho, T_j U_0 \phi) = -\omega_j (T_j \rho, U_0 \phi).$$

由于 ω_j 是任意的，我们得到 $(T_j \rho, U_0 \phi) = 0$。 ▌

上述结果在每一个时空点都成立。如果 $\phi(x)$ 是一个解，它一定是 x 的连续函数。因此，存在对 x 为连续的 $U_0(x)$，使 $U_0(x)\phi(x)$ 处在么正规范中：

$$\phi(x) \longrightarrow U_0(x)\phi(x),$$

$$U_0(x)\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\phi}(x) \end{pmatrix} \begin{matrix} K\text{ 维，戈德斯通空间} \\ R-K\text{ 维，希格斯空间。} \end{matrix} \tag{4.103}$$

2. 希格斯机制

在么正规范内，真空解是

$$\phi(x) = \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\rho} \end{pmatrix}, \tag{4.104}$$

$$A_a^\mu(x) = 0.$$

能量在真空值附近的解的形式为

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\rho} + \eta(x) \end{pmatrix}, \tag{4.105}$$

$$A_a^\mu(x) \text{ 是小量，}$$

其中 $\eta(x)$ 和 $A_a^\mu(x)$ 都是小量，因为能量是 η 和 A_a^μ 的连续函数。

在这些小量的一级近似下，我们有

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(\eta, V''(\rho)\eta),$$

$$j_a^\mu = -g^2(T_a\rho,\ T_b\rho)A_b^\mu. \tag{4.106}$$

我们定义下列矩阵，将证明它是质量矩阵

$$(\mu^2)_{rs} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & V''(\rho) \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{戈德斯通空间} \\ \text{希格斯空间} \end{array}$$

$$(M^2)_{ab} \equiv g^2(T_a\rho,\ T_b\rho) = \left[\begin{array}{c|c} (M^2)_{ij} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{戈德斯通空间} \\ \text{希格斯空间} \end{array} \tag{4.107}$$

利用这些矩阵，可以把线性化的方程写成

$$\begin{aligned} &\Box^2\eta_r + (\mu^2)_{rs}\eta_s = 0 \qquad (r = 1, \cdots, R-K), \\ &\Box^2 A_i^\nu + (M^2)_{ij}A_j^\nu = 0 \quad (\partial_\mu A_i^\mu = 0) \quad (i = 1, \cdots, K), \\ &\Box^2 A_a^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A_a^\mu) = 0 \qquad (a = 1, \cdots, N-K). \end{aligned} \tag{4.108}$$

这些方程分别描写有质量的希格斯玻色子，有质量的矢量玻色子和无质量的矢量玻色子，它们简要地列在表 4.4 中。这些零质量的矢量玻色子就是与未破缺的对称性 H 相联系的规范粒子。

有质量的矢量玻色子的数目等于假若没有规范耦合本应存在的戈德斯通玻色子的数目。实际上，不存在任何戈德斯通玻色子，它们都被有质量的矢量玻色子吃掉了(eaten up)。

如果场 ϕ 是复的，而且我们不把它变成实的形式，那么矢量玻色子质量矩阵就要表示成另外一种形式

$$(M^2)_{ab} = \frac{1}{2}g^2\rho^+\{L_a, L_b\}\rho. \tag{4.109}$$

例

关于对称性自发破缺的群论方面的知识，我们用两个例子来说明。

(i) 第一个例子，取 $G = O(n)$，$\phi = \{\phi_1\cdots\phi_n\}$ (基础表示)，且

$$V(\phi) = \lambda[(\phi_1^2 + \cdots + \phi_n^2) - a^2]^2,$$

可选取$\rho=\{0,\cdots 0,a\}$。显然$H=O(n-1)$。$O(n)$群有$\frac{1}{2}n(n-1)$个生成元，$O(n-1)$有$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$个生成元。因此：

无质量矢量玻色子数$=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，

有质量矢量玻色子数$=\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

$$=n-1,$$

希格斯玻色子数$=1$。

(ii) 作为第二个例子，考虑$G=SU(2)$，这时$N=3$。假定ϕ场由一个实的三重态π和一个复的二重态K组成

$$\phi=\begin{pmatrix}\pi\\ K\end{pmatrix},\qquad \pi=\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}K_1\\ K_2\end{pmatrix}.$$

取
$$V=\lambda(\pi_1^2+\pi_2^2+\pi_3^2-a^2)^2+\lambda'(K_1^*K_1+K_2^*K_2-b^2)^2,$$
则

$$\rho=\begin{pmatrix}\phi_0\\ K_0\end{pmatrix},\qquad \phi_0=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ a\end{pmatrix},\ K_0=K_0^*=\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}.$$

生成元由下式表示

$$L_a=\begin{pmatrix}I_a & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\tau_a\end{pmatrix},$$

其中I_a是伴随表示的3×3矩阵，而τ_a是2×2泡利矩阵。这样

$$L_a\rho=\begin{pmatrix}I_a\phi_0\\ \frac{1}{2}\tau_a K_0\end{pmatrix}.$$

我们区分$b\neq 0$和$b=0$两种情况。

若$b\neq 0$，则$K\neq 0$。这时，没有任何生成元可以使ρ变成

零，因为没有任何 τ_a 可以使 K_0 变成零。证明如下：

假定结果与上述相反，例如 $\tau_3 K_0=0$，则 $-i[\tau_1,\tau_2]K_0=0$，或 $\tau_1\tau_2 K_0=\tau_2\tau_1 K_0$，但 $\tau_1\tau_2=-\tau_2\tau_1$，因此 $K_0=0$（矛盾）。于是，在这种情况下，对称性是完全破缺的，即 H 是空集，而且

——没有零质量矢量玻色子；

——有三个有质量的矢量玻色子；

——有三个希格斯玻色子（一个实场和一个复场）。

若 $b=0$，则 $H=U(1)$。

表 4.4　希格斯机制

G 自发破缺成 H

$N=G$ 的生成元个数

$N-K=H$ 的生成元个数

R $=G$ 的实表示的维数.

场	场的个数	独立分量的个数
η_i（希格斯场，有质量的）	$R-K$	$R-K$
A_i^μ（规范场，有质量的）	K	$3K$
A_s^μ（规范场，无质量的）	$N-K$	$2(N-K)$
		总数　$N+R$

参 考 文 献

[1] C.N.Yang and R.L.Mills, *Phys.Rev*, 96,191 (1954).

[2] 对于一般性的参考，见 W,Miller, *Symmetry Groups and Thei Applications* (Academic press, NewYork,1972)；R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley-Interscience, New York, 1974).

[3] S.L.Glashow and M.Gell-Mann, *Annals of Phys.* 15 437

(1961).
[4] C.N, Yang, *Phys. Rev.Lett.*, 33 445(1974).
[5] T.T.Wu and C.N.Yang, *Phys.Rev.*D 12 3845(1975).
[6] J. Schwinger, *Phys. Rev*, 127, 324(1962)
[7] N. Christ, A. Guth, and E. Weinberg, *Nucl. Phys*, B 114 61(1976); K. Huang and D. Stump, *Phys. Rev.* D 15 3660(1977).
[8] S. Weinberg, *Phys. Rev.* D7 1068(1973).

第五章　拓扑孤粒子

5.1　孤粒子

在第三章我们曾提到，一个经典的孤粒子解（孤粒子）是经典运动方程的一个这样的解：它的能量密度只在一个有限的空间范围内不为零。因此它的总能量是有限的。把它量子化就得到相应的量子孤粒子。在这里我们讨论杨-密尔斯场论中的孤粒子并且主要处理经典情形。

仅当真空是简并的，而物理真空是这些真空之一时，才会出现拓扑孤粒子。在空间趋于无穷处拓扑孤粒子趋向于一个真空解，这个真空与物理真空有不同的拓扑性质。拓扑的不同使孤粒子成为稳定的。还存在一些非拓扑孤粒子解[1]，它们渐近地趋向于物理真空，但我们不打算在这里讨论它们。

孤粒子可以是静态的或者是与时间相关的。静态孤粒子指的是一种其 $A^\mu(x)$ 可以通过连续的规范变换而变成与时间无关的孤粒子解。这个定义的等价表述是：$A^\mu(x)$ 的时间演化是一个连续的规范变换，即：

$$A^\mu(\boldsymbol{x},t+dt)=A^\mu(\boldsymbol{x},t)+\frac{1}{g}\partial^\mu d\omega(\boldsymbol{x},t)-i\Big[d\omega(\boldsymbol{x},t),A^\mu(\boldsymbol{x},t)\Big],$$

或 (5.1)

$$\dot{A}^\mu(x)=\frac{1}{g}\partial^\mu\omega(x)-i\left[\dot{\omega}(x),A^\mu(x)\right], \tag{5.2}$$

式中 $\omega(x)$ 是一个任意的连续函数。为了证明这种等价性，我们注意到（5.2）式的解通过一个规范变换 $-\omega(x)$ 就可以变成与时间无关，只要 $\omega(x)$ 满足

$$\partial^{\mu}\dot{\omega}(x) = ig[\dot{\omega}(x), A^{\mu}(x)]. \tag{5.3}$$

相应的解为

$$\dot{\omega}(x) = \Omega(P)\dot{\omega}(x_0)\,\Omega^{-1}(P), \tag{5.4}$$

其中 $\Omega(P)$ 是（4.64）式中所定义的矩阵，路经 P 的起点为 x_0，终点为 x。由（5.4）式取对时间的积分可以求得 $\omega(x)$，尽管 $\omega(x)$ 依赖于路经 P 的选择，但它与时间的依赖关系却与 P 无关，因为 P 的两个端点都是固定的。P 的选取上的自由度只是反映出静态解 $A^{\mu}(x)$ 仍有与时间无关的规范变换自由度。静态解在其中与时间无关的这种规范将称为静态规范(static gauge)。

有限能量的静态解或者是真空解或者是一个静态孤粒子。对于一个纯杨-密尔斯场（即，不与物质场耦合的杨-密尔斯场），我们能证明有下述性质〔2〕：

在纯杨－密尔斯理论中除了在四维空间外，不存在任何静态孤粒子。

证明：在 $(n+1)$ 维闵可夫斯基空间内，设时空指标为 $\mu=0, 1,\cdots,n$，而空间指标为 $k=1,\cdots,n$。考虑一些能量有限而又不是真空的静态解。正则能量-动量张量为

$$\theta^{\mu\nu} = -F_a^{\mu\lambda}F_{a\lambda}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_a^{\alpha\beta}F_{a\alpha\beta}, \qquad (\partial_{\mu}\theta^{\mu\nu}=0).$$

这是一个规范不变量，因此与 x^0 无关。同证明有关的量是如下的几个：

$$\theta^{\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}(n-3)F_a^{\alpha\beta}F_{a\alpha\beta},$$

$$\theta^{00} = \frac{1}{2}F_a^{k0}F_a^{k0} + \frac{1}{4}F_a^{ij}F_a^{ij},$$

$$\theta^{0k} = F_a^{j0}F_a^{jk}.$$

要求能量有限意味着

$$\int d^n x \left(\frac{1}{2}F_a^{k0}F_a^{k0} + \frac{1}{4}F_a^{ij}F_a^{ij}\right) < \infty,$$

它导致以下条件

$$F_a^{\mu\nu}\xrightarrow[r\to\infty]{}O(r^{-n/2-\epsilon})\quad(\epsilon>0),$$

$$r^2\equiv\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

我们可以证明对于一个静态孤粒子，$f_a^{k0}=0$。证明方法如下。在静态规范下，$\partial^0A^k=0$，因此，利用（4.42）式知

$$F_k{}^0=\partial^kA^0+ig[A^k,A^0].$$

在（4.78）式中与这里有关的运动方程为

$$\partial_kF^{k0}+ig[A_k,F^{k0}]=0.$$

因此

$$A_0\{\partial_kF^{k0}+ig[A_k,F^{k0}]\}=0,$$

$$\partial_k(A_0F^{k0})-(\partial_kA^0)F^{k0}+ig(A_0A_kF^{k0}-A_0F^{k0}A_k)=0,$$

$$\mathrm{Tr}\int d^nx\{\partial_kA^0+ig[A_k,A_0]\}F^{k0}=0,$$

$$\mathrm{Tr}\int d^nxF_{k0}F^{k0}=0,$$

$$\int d^nxF_a^{k0}F_a^{k0}=0\ .$$

由于 $F_a^{k0}F_a^{k0}=|\boldsymbol{E}_a|^2$ 非负，它必为零。因此，在静态规范下，$E_a^k=F_a^{k0}=0$。又由于在规范变换下 $F^{k0}\to UF^{k0}U^{-1}$，所以我们断定对于一个静态解，在任何规范下都有 $F_a^{0k}=0$。

现在考虑

$$\partial_j(x^k\theta^{jk})=\theta_k^k+x^k\partial_j\theta^{jk},$$

$$\partial_\mu\theta^{\mu k}=0\Longrightarrow\partial_0\theta^{0k}+\partial_j\theta^{jk}=0,$$

所以 $$\partial_j(x^k\theta^{jk})=\theta_k^k-x^k\partial_0\theta^{0k}.$$

下式最后一项对静态解为零。因此

$$0=\int d^nx\ \partial_j(x^k\theta^{kj})=\int d^nx\theta_k^k.$$

利用 $\theta_k^k=\theta_\mu^\mu-\theta^{00}$，我们得到

$$\int d^n x \left[(2-n) F_a^{k0} F_a^{k0} - \frac{1}{2}(4-n) F_a^{jk} F_a^{jk} \right] = 0.$$

正如前面所证明的，$F_a^{k0}=0$，因此

$$(4-n)\int d^n x F_a^{ij} F_a^{ij} = 0.$$

所以，除非 $n=4$，否则必有 $F_a^{ij}=0$。

对于 $n=4$，纯杨-密尔斯场静态孤粒子可以明显地构造出来．5.2 节讨论的瞬子(instanton)是它的一个例子．对于 $n\neq 4$，仅当有物质场存在时才能有静态孤粒子。三维空间的磁单极是它的一个例子，我们将在 5.3 节讨论．

孤粒子解的量子化要求适当地处理孤粒子作为一个整体的平移运动，因而是相当复杂的[3]。这里我们不再进行讨论。

5.2 瞬　　子

1. 拓扑荷

上面我们已经证明，纯杨-密尔斯理论只有在四维欧几里得空间才可能有静态孤粒子解。现在我们来选一个例子，即瞬子解，它用与真空不同的拓扑荷表征．人们可能会奇怪，一个只在四维欧几里得空间存在的现象为什么会与我们有关系。答案就在于四维闵可夫斯基空间的量子场论等价于四维欧几里得空间的经典场论，这一点我们将在第七章证明。瞬子可能有许多物理应用，我们将在第八章讨论。

在这一节，我们考虑 $G=SU(2)$。四维欧氏空间中的一个矢量用 x^μ（$\mu=1,2,3,4$）来代表，上、下指标没有差别。我们可以把 x^μ 看成是度规为（1，－1，－1，－1，－1）的五维闵氏空间中一个矢量的空间分量，或者看成在通常的四维闵氏空间中的一个4维矢量，但要把其时间分量延拓到虚值，即 $x^0\to -ix^4$。拓扑

荷 (topological charge) 定义为

$$q \equiv \frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x \ \mathrm{Tr}\,\widetilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{5.5}$$

首先，我们来证明它的被积函数是一个四维全散度：

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\widetilde{F}^{\mu\nu}\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu X^\mu,$$

$$X^\mu = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}A_\alpha\partial_\beta A_\gamma + \frac{i}{3}g\ A_\alpha A_\beta A_\gamma\right]. \tag{5.6}$$

证明：

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\widetilde{F}^{\mu\nu}\ F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ \mathrm{Tr}\{[(\partial_\alpha + ig\ A_\alpha)\ A_\beta][(\partial_\mu + igA_\mu)\ A_\nu]\}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\,[(\partial_\alpha A_\beta)(\partial_\mu A_\gamma) + 2ig(\partial_\alpha A_\beta)\ A_\mu A_\nu$$

$$- g^2 A_\alpha A_\beta A_\mu A_\nu].$$

最后一项没有贡献，因为它对 α、β 是对称的。其它部分的计算为：

$$(\partial_\alpha A_\beta)(\partial_\mu A_\nu) = \partial_\alpha(A_\beta\partial_\mu A_\nu) - A_\beta(\partial_\alpha\partial_\mu A_\nu),$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}[(\partial_\alpha A_\beta)A_\mu A_\nu]$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}[\partial_\alpha(A_\beta A_\mu A_\nu) - (\partial_\alpha A_\mu)A_\nu A_\beta - (\partial_\alpha A_\nu)A_\beta A_\mu].$$

后两项是相同的，而且与左边相等. 因此

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ \mathrm{Tr}[(\partial_\alpha A_\beta)A_\mu A_\nu\ ] = \frac{1}{3}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha\mathrm{Tr}\ (\ A_\beta A_\mu A_\nu\ ).$$

利用上式，我们得到

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\widetilde{F}^{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ \partial_\alpha\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}A_\beta\partial_\nu A_\nu + \frac{1}{3}igA_\beta A_\mu A_\nu\right). \ \blacksquare$$

注意，这个证明对于四维欧氏空间和四维闵氏空间都是可行的。利用 (5.6) 式，我们可以写成

$$q = \frac{g^2}{4\pi^2}\int d^4\,x\partial_\mu X^\mu = \frac{1}{4\pi^2}\int dS_\mu X_\mu. \tag{5.7}$$

其中 dS_μ 是半径 $R\rightarrow\infty$ 的三维超球面 S^3 的面元。

现在，把有限能量条件加进来：

$$F^{\mu\nu}\xrightarrow[r\to\infty]{}O(r^{-3}),\qquad r^2\equiv x_4^2+|x|^2,$$

$$A_\mu\xrightarrow[r\to\infty]{}-\frac{i}{g}U\partial^\mu U^{-1}+O(r^{-2}),\tag{5.8}$$

其中 $U\in SU(2)$。设

$$\lambda^\mu\equiv U\partial^\mu U^{-1},\tag{5.9}$$

则 $A^\mu\xrightarrow[r\to\infty]{}-(i/g)\lambda^\mu$。若在（5.6）式和（5.7）式中采用这一形式则给出：

$$X^\mu=\frac{1}{6g^2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma),$$

$$q=\frac{1}{24\pi^2}\int_{s^3}dS_\mu\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma).\tag{5.10}$$

为了计算面积分，我们用 θ_1、θ_2、θ_3 三个角度把 S^3 参数化。相应的单位矢量（4 维矢量）用 $\hat{\theta}_1^\alpha$、$\hat{\theta}_2^\alpha$、$\hat{\theta}_3^\alpha$ $(\alpha=1,\cdots,4)$ 来代表，它们满足：

$$\hat{\theta}_i^\alpha\hat{\theta}_j^\alpha=\delta_{ij}.$$

那时 dS_μ 的单位法向矢量可以写成

$$n_\mu=\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\hat{\theta}_1^\alpha\hat{\theta}_2^\beta\hat{\theta}_3^\gamma,$$

$$n_\mu n^\mu=1.$$

$$n_\mu\hat{\theta}_i^\mu=0.$$

利用这些矢量，可以把 dS_μ 写成 $dS_\mu\doteq n_\mu dS$，因此

$$\int dS_\mu X^\mu=\int dS\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\hat{\theta}_1^\alpha\hat{\theta}_2^\beta\hat{\theta}_3^\gamma X^\mu$$

$$=\frac{1}{6g^2}\int dS\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\mu\rho\sigma\tau}\mathrm{Tr}\hat{\theta}_1^\alpha\hat{\theta}_2^\beta\hat{\theta}_3^\gamma(\lambda^\rho\lambda^\sigma\lambda^\tau)$$

$$=\frac{1}{6g^2}\int dS\,\hat{\theta}_1^\alpha\hat{\theta}_2^\beta\hat{\theta}_3^\gamma\mathrm{Tr}(\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma)$$

$$=\frac{1}{6g^2}\int dS\varepsilon^{ijk}\mathrm{Tr}(\lambda^i\lambda^j\lambda^k),$$

其中

$$\lambda^i \equiv \widehat{\theta}^a_i \lambda^a \qquad (i=1,2,3) \text{ .} \tag{5.13}$$

于是

$$q = \frac{1}{24\pi^2}\int dS \varepsilon^{ijk} \mathrm{Tr}(\lambda^i \lambda^j \lambda^k),$$

$$\lambda^k = U\partial^k U^{-1}, \quad \partial^k = \widehat{\theta}^\mu_k \partial^\mu.$$

显然，当 $U=1$ 时，$q=0$，而当 $\lambda^k \to -\lambda^k$ 时 $q \to -q$。

现在我们来证明在连续规范变换下 q 是不变的。

证明：U 的任意无穷小改变都可以表示为下列变换

$$U \to U(1-i\omega), \quad U^{-1} \to (1+i\omega)U^{-1},$$

其中 $\omega = \omega_a(x) L_a$ 是该李代数的一个无穷小元素。于是，

$$\delta U = -iU\omega, \quad \delta U^{-1} = i\omega U^{-1};$$

$$\delta\lambda^k = \delta(U\partial^k U^{-1}) = (\delta U)(\partial^k U^{-1}) + U\partial^k(\delta U^{-1})$$
$$= iU(\partial^k \omega)U^{-1};$$

$$\delta q = \frac{1}{24\pi^2}\int dS \varepsilon^{ijk} \mathrm{Tr}[(\delta\lambda^i)\lambda^j\lambda^k + \lambda^i(\delta\lambda^j)\lambda^k + \lambda^i\lambda^j(\delta\lambda^k)]$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\int dS \varepsilon^{ijk} \mathrm{Tr}(\lambda^i \lambda^j \delta\lambda^k)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\int dS \varepsilon^{ijk} \mathrm{Tr}[(U\partial^i U^{-1})(U\partial^j U^{-1})U(\partial^k\omega)U^{-1}]$$

$$= \varepsilon^{ijk}\int dS \partial^k \,\mathrm{Tr}\,[(\partial^i U^{-1})(\partial^j U^{-1})\omega]$$

$$-\int dS \varepsilon^{ijk}\,\mathrm{Tr}\,[\partial^i \partial^k U^{-1})(\partial^j U)\omega$$

$$+(\partial^i U^{-1})(\partial^k \partial^j U^{-1})\omega].$$

因为 S^3 没有边界，所以第一项为零。又因为有 ε^{ijk}，所以第二项也为零。所以 $\delta q = 0$。▌

人们不能从上述得到 $q=0$ 的结论，因为 U 分成一些不能由连续变换联系起来的等价类。这可由以下看到：

对于 $x\in S^3$，$U(x)$ 表示一个 S^3 到 $SU(2)$ 群流形的映射，而后者在拓扑性质上是与 S^3 相同的。所以，$U(x)$ 就是 $S^3\to S^3$ 的映射。这些映射分成一些同伦类（homotopy classes），它们由“绕数”（winding number）n，即 S^3 空间被群流形 S^3 覆盖的次数所表征，第 n 类的一种表示是

$$U(x)=[u(x)]^n \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$u(x)=\frac{1}{r}\,(x_4+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}) \qquad \left(r^2\equiv\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right). \tag{5.15}$$

在每一类之内，q 是不变的，我们用 q_n 来代表它。可以直接证明

$$q_n=nq_1, \tag{5.16}$$

所以只要计算 q_1 即可，而

$$q_1=\frac{1}{24\pi^2}\int dS\,\varepsilon^{ijk}\,\mathrm{Tr}(\lambda^i\lambda^j\lambda^k), \tag{5.17}$$

$$\lambda^k=u\,\partial^k u^{-1}.$$

计算 q_1 时我们要注意，这个面积分要遍历 S^3 上所有的 x 值。在 S^3 上从一个 x 值到另一个值是 S^3 的一个转动，这样的一个转动总可以通过 u 的一个连续的变化同时又不影响 q 而完成。在 u 的连续改变下，（5.17）中的被积函数改变一个 4 维散度 $\partial_\mu X^\mu$，因此，我们可以把被积函数写成它在任何一个固定的 x 点的值加上一个 $\partial_\mu X^\mu$，而后者对于积分没有任何贡献。这样一来，要计算 q_1，只要算出任何一个固定点 x 处被积函数的数值，然后把结果乘以 S^3 的体积 $2\pi^2$ 即可。最方便的是计算被积函数在 $x_4=1$，$\boldsymbol{x}=0$ 点的值。在这一点的邻域，我们可以建立 S^3 之内的三维笛卡尔坐标轴 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$，并取 $\hat{\theta}_i=\hat{x}_i$（$i=1, 2, 3$），于是，在这一点，我们有

$$u=1,$$

$$\partial^k u^{-1} = \partial^k\left(\frac{x_4 + i\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}}{r}\right) = \frac{i\tau^k}{r} - \frac{x^k}{r^3}(x_4 + i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}) = i\tau^k.$$

因此

$$\lambda^k = i\tau^k,$$

从上式得出

$$q_1 = (2\pi^2)\left(-\frac{i}{24\pi^2}\right)\varepsilon^{ijk}\,\mathrm{Tr}\,(\tau^i\,\tau^j\,\tau^k) = 1.$$

于是，对于杨-密尔斯场的一个有限能量组态，拓扑荷的可能值为

$$q_n = n \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)\ . \tag{5.18}$$

2. 显解[4]

现在我们来构造一个 $q=1$ 的显解。取 $L_a = \frac{1}{2}\tau_a$，并利用简写 $F^2 = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$，$\widetilde{F}\cdot F = \widetilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$。我们注意到 $\widetilde{F}^2 = F^2$。拉格朗日密度和欧几里得作用量分别由下式给出

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}F^2,$$

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}F^2. \tag{5.19}$$

一个解相应于 S 的一个极值。考虑不等式

$$\int d^4x\,\mathrm{Tr}(F \pm \widetilde{F}\ )^2 \geqslant 0$$

或

$$\int d^4x(F^2 \pm \widetilde{F}\cdot F) \geqslant 0.$$

如果 $\mathrm{Tr}\,\widetilde{F}\cdot F > 0$，我们取“+”号；如果 $\mathrm{Tr}\widetilde{F}\cdot F < 0$，我们取“−”号。因此

$$\int d^4x\mathrm{Tr}F^2 \geqslant \left|\int d^4x\ \mathrm{Tr}\widetilde{F}\cdot F\ \right|$$

或

$$S\leqslant -\frac{1}{2}\left|\int d^4x\ \mathrm{Tr}\widetilde{F}\cdot F\right|. \tag{5.20}$$

当 $F=\pm\widetilde{F}$ 时，等号成立，这时我们就说 F 是自对偶(self-dual)的（反自对偶(anti-self-dual)的）。由于 $F=\pm\widetilde{F}$ 相应于 S 的一个极值，所以任何一个自对偶的或反自对偶的 F 都是一个解。一个瞬子解是一个有着 $q=1$ 的自对偶 F。它对（欧氏）作用量的贡献是

$$S_{瞬子}=-8\pi^2/g^2. \tag{5.21}$$

设

$$\begin{aligned}
&\tau_\mu=(\tau, i) \qquad (\mu=1,\ 2,\ 3,\ 4)\ ,\\
&\tau_\mu^*=(\tau, -i),\\
&\tau_{\mu\nu}=i(\tau_\mu\tau_\nu^*-\delta_{\mu\nu}),\\
&\widetilde{\tau}_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

注意，$\tau_{\mu\nu}$ 是自对偶的。利用上面的符号，我们可写出

$$\begin{aligned}
&(x\cdot\tau)(x\cdot\tau^*)=r^2,\\
&u=i\frac{x\cdot\tau^*}{r},\\
&u^{-1}=-i\frac{x\cdot\tau^*}{r},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$A^\mu_{纯规范}=-\frac{i}{g}u\partial^\mu u^{-1}=\frac{1}{g}\frac{\tau_{\mu\nu}x_\nu}{r^2}.$$

对于 $q=1$ 的一个有限能量解，设

$$\begin{aligned}
&A_\mu=\frac{1}{g}\ \frac{\tau_{\mu\nu}x_\nu}{r^2}f(r^2),\\
&f(0)=0 \qquad (在\ r=0\ 处正则化)\ ,\\
&f(\infty)=1 \qquad (q=1,\ 有限能量)\ .
\end{aligned} \tag{5.24}$$

为使其成为一个解，只须选取 f 使得 $F_{\mu\nu}=\widetilde{F}_{\mu\nu}$。由（5.24）式，我们得到

$$F_{\mu\nu}=\frac{2}{g}\left\{\frac{f(1-f)}{r^2}\tau_{\mu\nu}+\left[f'-\frac{f(1-f)}{r^2}\right](\tau_{\mu\lambda}x_\lambda x_\nu-\tau_{\nu\lambda}x_\lambda x_\mu)\right\},\tag{5.25}$$

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}=\frac{2}{g}\left\{\frac{f(1-f)}{r^2}\tau_{\mu\nu}+\left[f'-\frac{f(1-f)}{r^2}\right]\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\tau_{\alpha\lambda}x_\lambda x_\beta-\tau_{\beta\lambda}x_\lambda x_\alpha)\right\}.\tag{5.26}$$

于是，如果第二项为零，则 $F_{\mu\nu}$ 是自对偶的。此时

$$f'-\frac{f(1-f)}{r^2}=0.$$

满足所要的边界条件的通解为

$$f(r^2)=\frac{r^2}{\rho^2+r^2},\tag{5.28}$$

其中 ρ 是一个任意的标度参量。利用上式，我们有

$$F_{\mu\nu}=\widetilde{F}_{\mu\nu}=\frac{2}{g}\frac{\rho^2}{(r^2+\rho^2)^2}\tau_{\mu\nu},\tag{5.29}$$

它就是 $q=1$ 的一个瞬子的场张量。$q=-1$ 的瞬子称为反瞬子，它可以由（5.29）式用 $\overline{\tau}_{\mu\nu}$ 代替 $\tau_{\mu\nu}$ 而得到，只要

$$\overline{\tau}_{ij}=\tau_{ij},\quad \overline{\tau}_{i4}=-\tau_{i4}.\tag{5.30}$$

瞬子的物理方面的内容我们将在第八章讨论。

5.3 磁单极

1. 拓扑稳定性

三维空间纯杨-密尔斯理论中没有任何孤粒子；但是，当有物质场时孤粒子就可能存在。现在我们来讨论这样一个例子。

考虑任何一种简单的规范群 G，并引入标量物质场 $\phi(x)=\{\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots\}$，它形成 G 的一个表示（通常是可约的表示）。利用一个实表示，我们把总能量写成

$$\mathscr{E}=\int d^3x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}_a\cdot\boldsymbol{B}_a+\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_a)+\frac{1}{2}(D^0\phi,\ D^0\phi)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(D^k\phi,D^k\phi)+V(\phi)\right].\tag{5.31}$$

假定$V(\phi)$的最小值位于$\phi(x)=\rho(x)$处：

$$V(\rho)=0,\quad V'(\rho)=0,\quad V''(\rho)>0.\tag{5.32}$$

对于一个有限能量解的条件是

(a) $F^{\mu\nu}(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}O(r^{-2}),\qquad r\equiv|\boldsymbol{x}|,$

$$A^\mu(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}-\frac{i}{g}U\partial^\mu U^{-1}+O(r^{-1});\tag{5.33}$$

(b) $D^\mu\phi(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}O(r^{-2})$;

(c) $\phi(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}\rho(x)+O(r^{-2})$.

在 (a) 中，A^μ 的第一项是纯规范形式，但不是$O(r^{-1})$项。正是后一项是我们将感兴趣的一项。

首先我们来考虑 (c) 的含意。正如我们在 4.6 节所指出的，$\rho(x)$ 不是唯一的。独立的那些 ρ 都是$U(x)\rho_0$形式的，其中ρ_0是一个满足 (5.32) 式的常数，而$U(x)$属于G/H中的一个陪集（H 是对于 ρ 的一个小群，它是 G 中使 ρ 不变的最大子群）。反之，给定一个 $\rho(x)$ 总可以写成 $U(x)\rho_0$ 的形式。因为$\rho(x)$是在 S^2（$r\to\infty$的一个三维球的球面）上的一点的 $\phi(x)$值，所以函数 $\rho(x)$ 是 S^2 到 G/H 的一个映射 (mapping)：

$$\rho(x):S^2\longrightarrow G/H.\tag{5.34}$$

由定义可知，恒等映射相应于物理真空。一个拓扑孤粒子仅当存在一个非平凡映射 (non-trivial map) 时才可能存在。那时，拓扑性质不同于物理真空的拓扑，使孤粒子稳定。

映射 (5.34) 分成一些同伦类，它们组成一个群，即 G/H 的第二同伦群 (second homotopy group)，用 $\pi_2(G/H)$代表。一般情况下，第 n 同伦群 $\pi_n(x)$是由不等价映射 (inequivalent

mapping) $S^2 \to X$组成的群．如果 $\pi_2(G/H)=0$（即它只包含恒等映射及其连续形变），则不存在任何一个拓扑孤粒子．$\pi_2(G/H)$的某些一般性质如下所述[5]：

(a)对于单连通的 G

$$\pi_2(G/H)=\pi_1(H),$$
$$\pi_1(G/H)=0; \tag{5.35}$$

(b) 如果$G=\widetilde{G}/C$，其中$\widetilde{G}$是有一个有限的中心（即与$\widetilde{G}$的所有的元素都对易的子群）的单连通群，而C是$\widetilde{G}$的中心的一个子群，则

$$\pi_2(G/H)=\pi_2(\widetilde{G}/H)=\pi_1(H),$$
$$\pi_1(G/H)=C. \tag{5.36}$$

下面我们给出这些性质的几个例子，假设 H 是非空集：

例 1． $G=SU(2)$．

(a) 对于半整数表示，$H=U(1)$，$\pi_1(H)=0$．

(b) 对于整数表示，$H=U(1)$，$\pi_1(H)=Z$（所有整数的集合）．

例 2． $G=SU(3)$．

(a) 对于三重态表示，$H=SU(2)$，$\pi_1(H)=0$．

(b) 对于八重态表示，ρ可以表示成一个3×3的无迹矩阵．如果其所有的本征值都不相同，则$H=U(1)\times U(1)$，$\pi_1(H)=Z+Z$．如果本征值中有两个相同，那么$H=U(2)$，$\pi_1(H)=Z$．

例 3． $G=SU(2)\times U(1)$．$H=U(1)$，$\pi_2(G/H)=0$．这表明温伯格-萨拉姆模型没有任何孤粒子，我们将在第六章详细讨论这个问题．

2.磁通量量子化[6]

假设$\pi_2(G/H)\neq0$，则拓扑孤粒子就可能存在，且（5.33）

的条件（b）对 S^2 加上了一些边界条件：到 $O(r^{-2})$ 量级

$$D^{\prime}\rho(x)=\partial^{\prime}\rho(x)+igA_a^{\prime}(x)L_a\rho(x)=0. \tag{5.37}$$

$A_a^{\prime}$ 中的 $O(r^{-1})$ 项必定被 $\partial^{\prime}\rho$ 抵消。这样一来，把 $A_a^{\prime}$ 与 ρ 联系起来。特别是当 ρ 不是常数时，将有一个库仑位势。对于静态解，它不可能是电势。因此，它将是相应于一个磁单极的磁势。

如果 $V(\phi)$ 的所有的最小值都可以用连续的规范变换联系起来，则条件（5.37）总是能够满足的。我们假设情况正是如此。

考虑如图 5.1 所示的 S^2 上三个大圆 $C_k(k=1,2,3)$，它们的法线分别为 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$。令 ΔC_k 是 C_k 上的一段有限长的圆弧，其端点为 y 和 z。按照（5.37）式，$\rho(x)$ 经受了由 y 到 z 数量级为 r^{-2} 的平行移动：

$$\rho(z)=\Omega(\Delta C_k)\rho(y),$$

$$\Omega(\Delta C_k)=T\exp\left(ig\int_{\Delta C_k}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}(x)\right) \tag{5.38}$$

其中 $d\boldsymbol{s}$ 是 S^2 上的一段弧元。另一方面，$\rho(z)$ 也可以通过绕 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 转动某个角度 $\Delta\theta$ 而从 $\rho(y)$ 得到，这个转动由 G 的生成元 $\{L_a\}$ 的一个线性组合生成，由于这些转动组成一个阿贝尔群，所以，必定存在一种 $\{L_a\}$ 的选择方式，使

$$[\Omega(\Delta C_k),\ \Omega(\Delta C_k^{\prime})]=0, \tag{5.39}$$

其中 ΔC_k 和 $\Delta C_k^{\prime}$ 是 C_k 的两段圆弧。这样，（5.38）式中算符 T 就可以去掉。于是

$$\Delta\Omega(C_1)=\exp\left(ig\int_{\Delta C_1}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}\right)=\exp\left(-i(\Delta\theta_1)\mathscr{J}^1\right),$$

$$(5.40)$$

$$\Delta\Omega(C_2)=\exp\left(ig\int_{\Delta C_2}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}\right)=\exp\left(-i(\Delta\theta_2)\mathscr{J}^2\right),$$

$$\Delta\Omega(C_3)=\exp\left(ig\int_{\Delta C_3}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}\right)=\exp\left(-i(\Delta\theta^3)\mathscr{J}^3\right).$$

选择同样的一组轴 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$，做所有上述这些转动是完全可能的，例如图 5.1 中的闭合回路 OPQ。于是，选同样的一组 $\{L_a\}$，可以使 $\mathscr{J}^k$ 满足

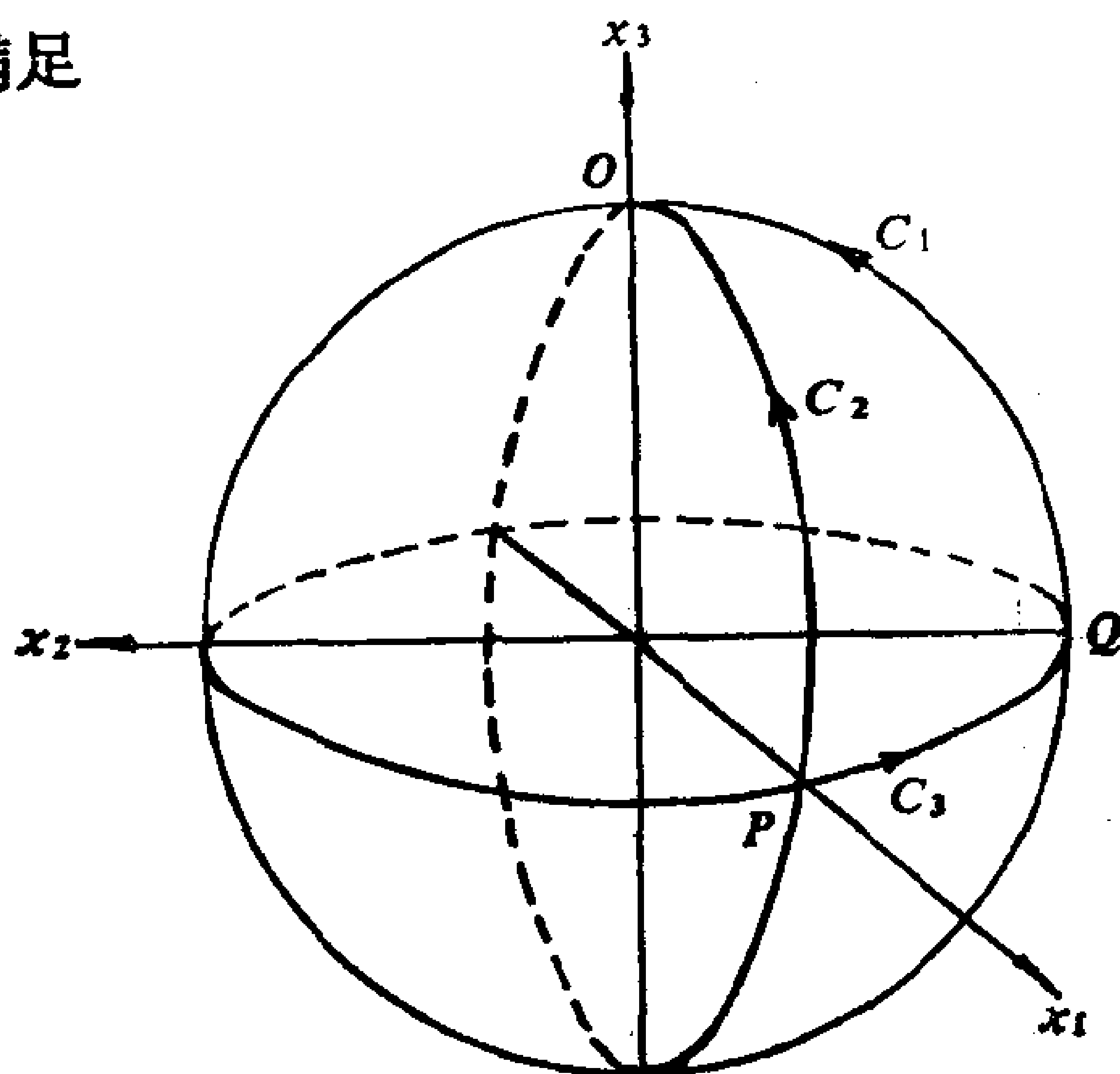


图 5.1　球上的一些大圆

$$[\mathscr{J}^1,\mathscr{J}^2]=i\mathscr{J}^3 \qquad (1,2,3\text{ 循环}). \qquad (5.41)$$

由于 $\mathscr{J}_k$ 的本征值是整数或半整数，所以角度 $\Delta\theta_k$ 仅能定义为模 4π 的同余数 ($\mathrm{mod}(4\pi)$)。这相应于转动 4π 角才使体系真正不改变，这一点我们在 4.2 节已经指出了。

现在取 ΔC_k 为一个完整的大圆，因此 $\Delta\theta_k=2\pi$，而

$$\Omega(C_k)=\exp\left(ig\oint_{C_k}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}\right)=\exp(-2\pi i\mathscr{J}^k). \qquad (5.42)$$

设磁通量矩阵 Φ^k 定义为

$$\Phi^k\equiv\oint_{C_k}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}, \qquad \Phi_k\equiv-\Phi^k. \qquad (5.43)$$

这个磁通量指的是 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的通量，它是无散的，所以一般来讲，不是 $\boldsymbol{B}$ 的通量。磁通量的本征值仅能定义为对模 $\left(\frac{4\pi}{g}\right)$ 同余。

根据（5.42）和（5.41）式，我们有

$$\left[\frac{g}{2\pi}\Phi_1,\ \frac{g}{2\pi}\Phi_2\right]=\frac{ig}{2\pi}\Phi_3 \quad （1，2，3循环）．（5.44）$$

它是$U(1)$情况下磁通量量子化条件（3.49）式的推广．我们已经假设了$\{L_a\}$是以特定方式选取的．这就等价于说（5.42）式是在S^2上$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$没有奇异性的规范中成立．

为使（5.44）式能有非平凡解，G必须包含$SU(2)$。选$\{L_a\}$使其前三个就是$SU(2)$的生成元

$$\{L_a\}=\{L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_a\} \qquad (a=4,5,\cdots,N), \quad (5.45)$$

$$[L_1,\ L_2]=iL_3 \quad （1，2，3循环）．$$

当然，这一选择依赖于坐标系$\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$的选择．在坐标系的转动和反射下Φ_k和L_k（$k=1，2，3$）两者都必须象一个三维矢量那样变化．于是，下列方程就是一个三维矢量方程：

$$\frac{g}{2\pi}\Phi_k=-\frac{g}{2\pi}\oint_{C_k}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}=L_k, \quad (k=1，2，3)．(5.46)$$

注意，L_k中的指标k是一个内部对称性指标，同时它还起着三维矢量指标的作用．这样，内部对称性和空间对称性就耦合起来了．这个结果的根源是ρ的平行移动等价于转动．

3．边界条件

取$L_k=\frac{1}{2}\tau_k$，我们可以把（5.46）式改写为

$$-\frac{g}{2\pi}\Phi_a^k\tau_a\equiv-\frac{g}{2\pi}\oint_{C_k}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}_a\tau_a=\tau_k \quad (k=1,2,3),(5.47)$$

它导致结果

$$-\frac{g}{2\pi}\Phi_a^k\equiv-\frac{g}{2\pi}\oint_{C_k}d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}_a=\delta_{ak} \quad (k=1，2，3)．(5.48)$$

这要求A_a^k（$k=1，2，3$；$a=1，2，3$）为一个渐近地象r^{-1}那样衰减的赝张量，即：

$$A_a^k = 0 \qquad (a = 4,\ 5,\ \cdots,\ N)\ ,$$

$$A_a^k = g' \varepsilon^{akj} \frac{x^j}{r^2} + O(r^{-2}), \tag{5.49}$$

把该式代入（5.48）式可以确定式中的 g'：

$$g g' = 1 \qquad \text{对模 2 同余。} \tag{5.50}$$

$gg' = \pm 2$ 与平凡的情况 $gg' = 0$ 是规范等价的，而 $gg' = \pm 1$ 是规范等价的。因此，$A_a^k(x)$ 的边界条件是[7]

$$A_a^k(x) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{g} \varepsilon^{akj} \frac{x^j}{r^2} + O(r^{-2}) \quad (k = 1, 2, 3;\ a = 1, 2, 3). \tag{5.51}$$

它描写具有"球对称性"（即在 S^2 上 $\boldsymbol{A}$ 没有奇点）的唯一可能的拓扑孤粒子。

注意，g 是规范耦合常数，或规范场的"荷"。一个不可约多重态 ϕ 的荷是

$$e = \kappa g, \tag{5.52}$$

其中 κ 是表示 G 的一个生成元的矩阵的最小的正本征值。例如，对于基础表示，$O(3)$ 时 $e = g$，$SU(2)$ 时 $e = g/2$，而 $SU(3)$ 时 $e = g/3$。

现在我们来考察一下 $\rho(x)$ 的边界条件。把（5.51）代入（5.37）式中，我们得到：

$$d\boldsymbol{s} \cdot \left(\nabla\rho + i \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{L}}{r^2} \rho \right) = 0, \tag{5.53}$$

其中 $\boldsymbol{L} = (L_1,\ L_2,\ L_3)$，而 $d\boldsymbol{s}$ 是 S^2 上的无穷小弧元。把 $d\boldsymbol{s}$ 写成 $d\boldsymbol{s} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r} d\theta$，利用图 5.2 中所定义的符号，经过几步代数运算，可求得

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = i\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}\rho. \tag{5.54}$$

在 $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}$ 为对角，且其本征值为 λ 的表象中，上述方程的解为 $\rho = \rho_r e^{i\lambda\theta}$。由于 ρ 必须是 S^2 上的连续函数，所以 λ 必须是整数。

于是，仅当 ρ 属于 G 的 $SU(2)$ 子群的整数表示时，拓扑孤粒子才可能存在。让我们假定取伴随表示的最简单情况。那时 ρ 是场的三重态 ρ_a $(a=1,\ 2,\ 3)$，而 $(L_a)_{bc}=-i\varepsilon^{abc}$，于是 (5.53) 式可以写成

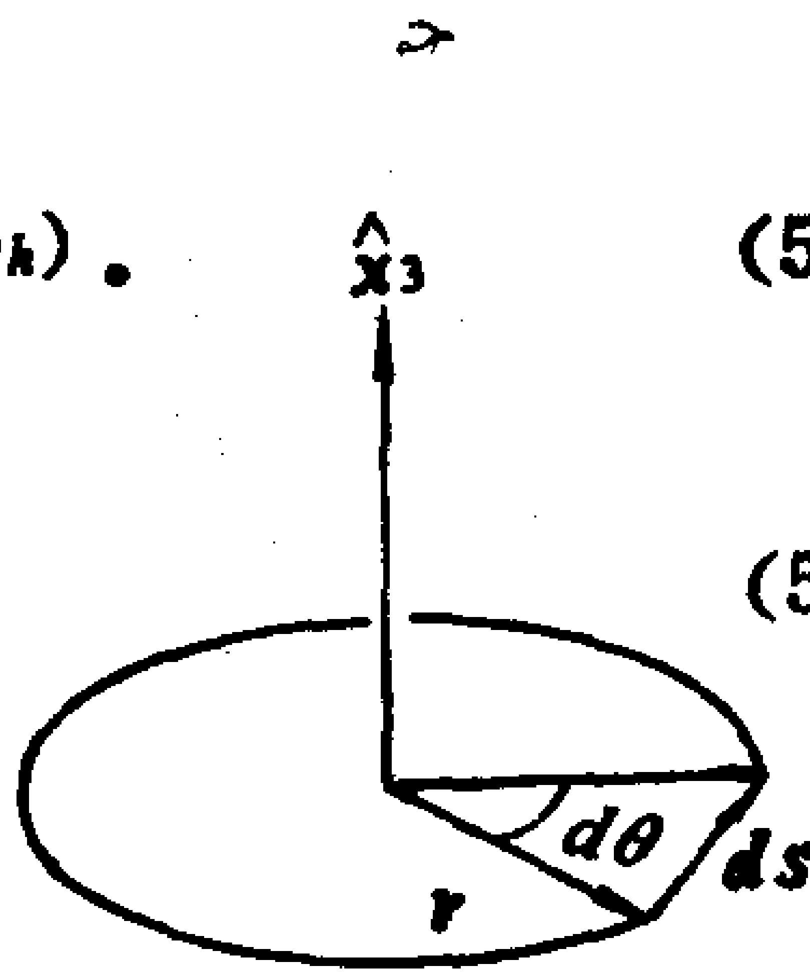
$$\partial^k\rho_b=-\varepsilon^{akj}\frac{x^j}{r^2}\varepsilon^{abc}\rho_c$$

$$=-\frac{1}{r^2}(\delta_{kb}x^c\rho_c-x^b\rho_k)\,. \tag{5.55}$$

其解是

$$\rho_a(x)=\frac{x^a}{r}\rho_0, \tag{5.56}$$

式中 ρ_0 是满足 (5.32) 式的任何一个常数。总括起来，一个球对称的拓扑孤粒子是



$ds=(\hat{x}_3\times r)d\theta$

图 5.2 (5.54)式中符号的定义

$$A_a^k(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}\frac{1}{g}\ \varepsilon^{akj}\frac{x^j}{r^2},$$

$$\Phi_a(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}\frac{x^a}{r}\rho_0\,. \tag{5.57}$$

可以证明，磁场有以下行为：

$$B_a^k(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}\frac{1}{g}\ \frac{x^ax^k}{r^4}, \tag{5.58}$$

而电场在 r^{-2} 量级为零。

4. 量解[8]

为了表明实际上确实存在一个解，取 $G=SU(2)$，且有一个三重态的希格斯场 $\phi_a(x)$。按照希格斯机制（见4.6节），应当有一个无质量的矢量玻色子，两个有质量的矢量玻色子和一个有质量的希格斯玻色子。

对于一个静态解，取 $A_a^0=0$ 以及

$$A_a^k(x)=\frac{1}{g}\varepsilon^{akj}\frac{x^j}{r^2}F(r),$$

$$\phi_a(x) = \frac{x^a}{r}\rho_0\eta(r), \tag{5.59}$$

其边界条件为：

$$F(0)=0,\ F(\infty)=1,$$
$$\eta(0)=0,\ \eta(\infty)=1, \tag{5.60}$$

其中，要求 F 和 η 在 $r=0$ 处为零是为了使解成为正则解。电场和磁场由下述公式给出

$$E_a^k=0,$$
$$B_a^k=\frac{1}{g}\ \frac{x^a x^k}{r^4}F(1-F)+\frac{1}{g}\left(\delta_{ak}-\frac{x^a x^k}{r^2}\right)\frac{F'}{r}. \tag{5.61}$$

总能量为

$$\mathscr{E}=\int d^3x\left\{\frac{1}{g^2}\left(\frac{F'}{r}\right)^2+\frac{1}{2g^2}\left[\frac{F(1-F)}{r^2}\right]^2\right.$$
$$\left.+\rho_0^2\left[\frac{\eta(1-F)}{r}\right]^2+\frac{\rho_0^2}{2}\left[\frac{\eta(1-F)}{r}+\eta' F\right]^2+V\right\}. \tag{5.62}$$

所有的项都是正定的，$F=0$ 和 $F=1$ 都不能给出最小值。因此，根据变分原理，必有一个解存在。取一个二次型的V 做数值计算表明，拓扑孤粒子质量的数量级为

$$M\sim\frac{m_V}{g^2/4\pi}, \tag{5.63}$$

其中 m_V 是矢量玻色子的质量。

由 (5.62) 式可见，对于纯杨-密尔斯场 ($\eta\equiv0$)，使 $\mathscr{E}$ 取最小值的 F 为 $F=1$，它使 (5.59) 式在 $r=0$ 处有一个不能接受的奇点。这正是为什么必须有希格斯场才能得到一个静态孤粒子解的理由。

5. 物理场

边界条件 (5.57) 只有在一种特殊规范，即库仑规范（我们

能证明 $\partial_k A_a^k = 0$）中，才是正确的。在这一规范中，大多数场不是物理场，而且很难看出只有一个无质量的矢量场以及它相应于 A_a^k 的什么样的组合。为了显示出物理的场，我们取么正规范。这个规范被定义为在其中 $\phi(x)$ 只有一个非零分量的规范，下列对比表明了这一点：

$$\text{库仑规范：}\ \phi(x) \xrightarrow[r\to\infty]{} \rho_0 \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix},$$

$$\text{么正规范：}\ \phi(x) \xrightarrow[r\to\infty]{} \rho_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

在库仑规范中，$\phi(x)$ 在内部对称性空间中的指向（即定义对角生成元 L_3 的第 3 轴）与普通空间中的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向一致。而在么正规范中，$\phi(x)$ 在内部对称性空间中的方向与 $\boldsymbol{r}$ 无关。为了从库仑规范变换到么正规范，我们做一个规范变换使空间每一点的 $\boldsymbol{r}$ 转到 $\boldsymbol{x}_3$：

$$\phi \to U\phi,$$
$$U = e^{-i\theta L_2} e^{-i\varphi L_3}, \tag{5.65}$$

其中 θ 和 φ 是球坐标系中 $\boldsymbol{r}$ 的极角。显然，沿着负的 z 轴方向，这个变换是不确定的，因为必须把一个向下的矢量 $\boldsymbol{r}$ 转到它的相反方向，做到这一点的方法不是唯一的。因此，在么正规范中，沿着负 z 轴，A_a^k 是不确定的。所以，在这个规范中，磁通量的量子化条件（5.44）是不成立的。

无质量矢量场张量 $B^{\mu\nu}$ 必须是 $F_a^{\mu\nu}$ 在希格斯空间的投影（见 .6节）：

$$B^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu} \phi_a / \rho_0. \tag{5.66}$$

这是一个规范不变量，因为在一个无穷小规范变换下

$$\delta F_a^{\mu\nu} = \varepsilon_{abc} \omega_b F_c^{\mu\nu},$$

$$\delta\phi_a = \varepsilon_{abc}\omega_b\phi_c,$$

因此

$$\delta(F_a{}^{\mu\nu}\phi_a) = \varepsilon_{abc}\omega_b(F_c{}^{\mu\nu}\phi_a + F_a{}^{\mu\nu}\phi_c) = 0.$$

所以，$F_a{}^{\mu\nu}\phi_a$ 在么正规范中和在库仑规范中是相同的。于是，我们可以很方便地在后一种规范中计算它。我们只算出它的渐近形式：

$$B^k \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{g}\,\frac{x^a x^k}{r^4}\,\frac{x^a}{r} = \frac{1}{g}\frac{x^k}{r^3}. \tag{5.67}$$

注意，它对整个 S^2 都是严格确定的，尽管沿着负z轴 A^k 没有定义。总而言义，在么正规范中我们有

$$\boldsymbol{B} \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{g}\,\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\ \text{（无质量规范场）}, \tag{5.68}$$

$$\phi \xrightarrow[r\to\infty]{} \rho_0\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\ \text{（希格斯场）}.$$

其它两个矢量场都是有质量的，因此随 $r\to\infty$ 而指数地衰减。

在远离原点的地方，$\boldsymbol{B}$ 好象是由位于 $\boldsymbol{r}=0$ 处、磁荷为 $\frac{1}{g}$ 的磁单极所产生的场，因此称为磁单极解。然而，在 $\boldsymbol{r}=0$ 处它没有奇异性。

作为对比，我们给出狄拉克磁单极[9]的矢量势和磁场，它带有沿着负z轴的一条弦：

$$\boldsymbol{A}_D = g'\,\frac{\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{r}}{r+z},\ A_0 = 0, \tag{5.69}$$

其中的 g' 是这样规定的，它使 $2g'e=$整数，而e是电荷。在直角坐标系中，$\boldsymbol{A}_D$ 的分量为：

$$A^1 = -\frac{g'}{r+z}\,\frac{y}{r},$$

$$A^2 = -\frac{g'}{r+z}\,\frac{x}{r}, \tag{5.70}$$

$$A^3=0。$$

而在极坐标中：

$$\begin{aligned} A_r &= 0 \\ A_\theta &= 0 \\ A_\varphi &= \frac{g'}{r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}。\end{aligned} \tag{5.71}$$

磁场为

$$B_D=\frac{\hat{r}g'}{r^2}+\hat{z}b_0(x)\delta(y)\theta(1-z)。\tag{5.72}$$

这个结果实际上与（5.68）式相同，差别仅在于要假定这个式子是在除了那条弦以外的所有地方，包括 $r=0$ 在内都成立。在狄拉克的那种情况下，磁单极不是在一种完备的理论基础上建立起来的，所以弦必然是一种人为引进的。在我们的情况下，实际上并没有任何弦，因为它不出现在 $\boldsymbol{B}$ 中，即使在 $\boldsymbol{A}$ 中也可以通过规范变换把它去掉。

迄今为止，磁单极还没有任何实验的证据，可能是因为即使它存在，它的质量也必定是如此之大，以致今天的加速器不可能把它产生出来。

6. 来自同位旋的自旋[10]

一个磁单极可以俘获一个同位旋为1/2的玻色子（即一个$SU(2)$二重态的玻色子）从而产生一个内禀角动量为$\hbar/2$的拓扑孤粒子，尽管这时并不存在狄拉克场。磁单极把同位旋转变成自旋。这种现象只在量子理论中发生。

关键在于，根据（5.44）式，磁通量矩阵$\left(\frac{g}{2\pi}\right)\Phi_k(k=1,2,3)$是空间转动的生成元。因此，应当把它们加到体系的总角动量中去。如果有同位旋为1/2的场，那么，它们的本征值就是半整数的。

作为一个例子，考虑$G=SU(2)$，取物质场由一个三重态的希格斯场ϕ和一个二重态K组成，且：

$$\phi(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}\rho\neq 0,\quad K(x)\xrightarrow[r\to\infty]{}0. \tag{5.73}$$

磁通量矩阵可以表示为

$$\frac{g}{2\pi}\Phi_k=L_k=\begin{pmatrix}C_k & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\tau_k\end{pmatrix}\quad (k=1,2,3)\ , \tag{5.74}$$

其中C_k是作为伴随表示的3×3矩阵。我们把它看成是该体系的额外角动量，与“正常”的总角动量加在一起，后者只有整数本征值。注意，规范场对于角动量没有贡献。在量子理论中，我们设$\phi(x)=\rho+\eta(x)$，而且把$\eta(\boldsymbol{r})$和$K(\boldsymbol{r})$用薛定谔绘景的量子场表示出来：

$$\eta(\boldsymbol{r})=\sum_p\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}[e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}a(\boldsymbol{p})+e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}a^+(\boldsymbol{p})],$$

$$K(\boldsymbol{r})=\sum_p\frac{1}{\sqrt{2E_p}}[e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}b(\boldsymbol{p})+e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}c^+(\boldsymbol{p})], \tag{5.75}$$

其中$a(\boldsymbol{p})$是一个同位旋矢量，而$b(\boldsymbol{p})$、$c(\boldsymbol{p})$都是同位旋旋量。额外角动量的对角分量是

$$\mathscr{J}^3=\sum_p(a(\boldsymbol{p}),C_3a(\boldsymbol{p}))+ +\sum_p\left[b^+(\boldsymbol{p})\frac{\tau_3}{2}b^+(\boldsymbol{p})-c^+(\boldsymbol{p})\frac{\tau_3}{2}c(\boldsymbol{p})\right], \tag{5.76}$$

其中

$$C^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad \frac{\tau_3}{2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{5.77}$$

(5.76)式中的第二项有半整数的本征值。必须把$\mathscr{J}^3$包括在总

角动量中的理由，其一是彭加勒不变性，其二是量子理论中需要有规范固定项[11]. 戈德哈伯尔 (Goldhaber) [12]给出了一种论证，证明了有半整数自旋的磁单极服从费米统计.

与磁单极的存在有关的一个现象是无质量的狄拉克场具有费米子数为$\frac{1}{2}$的态[13]. 在一维空间（其中的拓扑孤粒子称为"扭结" (kink)）内，这种现象的一种比较简单的类型可以用于聚合物上，预言了在聚乙炔中电子数为$\frac{1}{2}$的态[14].

参考文献

[1] T. D. Lee, *Phys. Reports*, 23 254 (1976).

[2] S. Deser. *Phys. Letters*, 64B 463 (1976).

[3] J. Goldstone and R. Jackiw. *Phys. Rev.* D11, 1486 (1975); N. H. Christ and T. D. Lee, *Phys. Rev.* D 12, 1606 (1975).

[4] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin, *Phys. Letters* 59 B85 (1975); G.' tHooft, *Phys. Rev. Lett.* 37, 8 (1976).

[5] M. I. Monastyrskii and A. M. Perelomov, JETP *Letters*, 21 43 (1975).

[6] K. Huang and D. R. Stump, *Phys. Rev.* D15, 3660 (1977).

[7] T. T. Wu and C. N. Yang, in *Properties of Matter Under Unusual Conditions*, edited by H. Mark and S. Fernbach (Intersience, New York, 1969), P. 349.

[8] G.'tHooft, *Nucl. Phys.* B79, 276(1974); A. M. Polyakov, JETP Lett. 20. 194 (1974).

[9] P. A. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* A133, 60 (1931).

[10] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett*, 36, 1116 (1976), P. Hasenfraz and G. 'tHooft, *Phys. Rev. Lett.* 36, 1119 (1976).
[11] K. Huang ang D.R.Stump. *op. cit.*
[12] A. Goldhaber, *Phys. Rev. Lett.*, 19, 1122 (1976).
[13] R.Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.* D13, 3398 (1976).
[14] W.P.Su, J. R.Schrieffer, and A. J. Heeger, *Phys. Rev.* B22, 2099 (1980).

第六章 温伯格-萨拉姆模型

6.1 物质场

电磁相互作用和弱相互作用可以统一在基于 $SU(2)\times U(1)$ 群建立的规范理论中，这个思想首先是由格拉肖(Glashow)[1]提出来的。后来，温伯格和萨拉姆利用对称性自发破缺的思想，按与规范不变性自洽的方式解决了产生质量的问题，最后得到的这个理论称为温伯格-萨拉姆模型，由特霍夫特（' tHooft）[2]证明了是一个可重整的量子理论。把夸克纳入到这个理论中，是由格拉肖、依里奥普鲁斯（Iliopoulos）和马亚尼（Maiani）[3]完成的。在实验证实了它的某些预言，其中最主要的是中性流的结构之后，这个理论被人们广泛地接受了。

温伯格-萨拉姆模型的基本思想在第一章中我们已经讨论了，在第二章对于电磁相互作用和弱相互作用的一些基本实验情况也作了评述。为了强调起见，我们再以另一种形式重复其中几点。

我们首先来复习一下手征性的定义，它是 γ_5 的本征值，$\gamma_5=+1$ 相应于右手性，$\gamma_5=-1$ 相应于左手性：

$$\gamma_5 R=R,\quad \overline{R}\gamma_5=-\overline{R},$$
$$\gamma_5 L=-L,\quad \overline{L}\gamma_5=\overline{L},\tag{6.1}$$

其中 R 和 L 都是只有两个独立分量的狄拉克旋量。它们可以从四分量的狄拉克旋量 ψ，用下列投影得到：

$$R=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi,\quad \overline{R}=\frac{1}{2}\overline{\psi}(1-\gamma_5),$$

$$L=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi,\quad \overline{L}=\frac{1}{2}\overline{\psi}(1+\gamma_5),\tag{6.2}$$

为了以后的应用，注意到

$$\overline{\psi}\psi=\overline{L}R+\overline{R}L,$$

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi=\overline{L}\gamma^\mu L+\overline{R}\gamma^\mu R\tag{6.3}$$

是很重要的。对于一个4维动量 $p^\mu=(E,\boldsymbol{p})$的有质量粒子，狄拉克方程可以写成：

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\psi=E\psi,\quad E=(p^2+m^2)^{\frac{1}{2}}.\tag{6.4}$$

利用恒等式$\boldsymbol{\alpha}=\gamma_5\boldsymbol{\sigma}$，并考虑到$\gamma_5$与$\boldsymbol{\sigma}$对易，可以把上式改写成：

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}R=\frac{E}{p}R-\frac{m}{p}\beta L,\quad p\equiv|\boldsymbol{p}|,$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}L=-\frac{E}{p}L-\frac{m}{p}\beta R.\tag{6.5}$$

若$m=0$，则这两个方程退耦成：

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}R=R,$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}L=-L.\tag{6.6}$$

所以，对于无质量的狄拉克粒子，手征性与其螺旋性相同；而对于它的反粒子，手征性与螺旋性相反（按照定义，一个反粒子具有与粒子相同的手征性；但由于（6.4）式中的E的符号改变，所以它们的螺旋性相反）。

电磁相互作用的拉格朗日密度为：

$$\mathscr{L}^{em}=e\overline{\psi}Q\not{A}\psi,\tag{6.7}$$

其中Q是电荷矩阵，而$\not{A}=A_\mu\gamma^\mu$。电荷改变的弱相互作用拉格朗日密度可以写成以下形式

$$\mathscr{L}^{ch}=\frac{g}{\sqrt{2}}\overline{L}(W_+\tau_-+W_-\tau_+)L=\frac{g}{2}\overline{L}(W_1\tau_1+W_2\tau_2)L,$$

(6.8)

其中，$W_{\pm}{}^{\mu}$是传递这种相互作用的矢量玻色子场，而

$$W_{\pm}{}^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^\mu \pm iW_2^\mu),$$

$$\tau_{\pm}=\frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2). \qquad (6.9)$$

把 (6.7) 和 (6.8) 式相加，我们得到

$$\mathscr{L}^{em}+\mathscr{L}^{ch}=\overline{L}\left[g\left(W_1\frac{\tau_1}{2}+W_2\frac{\tau_2}{2}\right)+eA\!\!\!/ Q\right]L+\overline{R}eA\!\!\!/ QR. \qquad (6.10)$$

这种形式表明，基本的旋量费米子场并不是那些四分量狄拉克旋量，更恰当地说是它们的左手和右手投影，而且 A^μ 可以与 W_1^μ 和 W_2^μ 组合在一起形成某种类型的一个多重态。

为了举例说明物质场的多重态结构以及对称性自发破缺的必要性，我们只考虑由电子和它的中微子所组成的一个轻子二重态：

$$L=\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}, \qquad R=e_R. \qquad (6.11)$$

假设中微子是无质量的，因此，ν_R 不存在。这个理论假设是在 $SU(2)$ 群下不变的，在该群作用下 L 象一个二重态一样变换，而 R 按一个单态变换。

拉格朗日密度中通常的力学质量项在 $SU(2)$ 下不可能是不变的，因为它正比于 $\overline{\psi}\psi=\overline{L}R+\overline{R}L$。我们不能破坏这种对称性（无论破坏的程度有多么小），因为它是准备规范化的。所以，在这个理论中，电子的质量只能来自于 $SU(2)$ 的自发破缺。实现这一自发破缺的一种方便的方法是引进一个二重态的希格斯场：

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_+\\ \phi_0\end{pmatrix}, \qquad (6.12)$$

其中的下标表示电荷，而质量项可以写成

$$\mathscr{L}^{mass} \propto \overline{L}\phi R + \overline{R}\phi^+ L, \tag{6.13}$$

其中$\overline{L}\phi$是一个$SU(2)$的单态，又是一个狄拉克旋量。这样，(6.13)式是洛仑兹不变量又是$SU(2)$下的不变量。如果ϕ具有非零的真空值，那么对于低激发态，(6.13)式与通常的质量项是不可区分的。把它详细地写出来，我们有

$$\mathscr{L}^{mass} \propto (\overline{\nu_L}\ \overline{e_L})\begin{pmatrix}\phi_+\\ \phi_0\end{pmatrix} e_R + \overline{e_R}(\phi_- \phi_0)\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}$$

$$= (\overline{\nu}_L e_R)\phi_+ + (\overline{e_R}\nu_L)\phi_- + (\overline{e}e)\phi_0. \tag{6.14}$$

前两项可以通过一个规范变换（么正规范）而去掉。如果在真空态$\phi \neq 0$，则最后一项给出电子质量。对于中微子，没有质量项。

如果希望给出中微子质量，那么可以利用共轭的希格斯二重态：

$$\tilde{\phi} \equiv \begin{pmatrix}\phi_0\\ -\phi_-\end{pmatrix}, \quad \phi_- \equiv \phi_+^*, \tag{6.15}$$

它也象$SU(2)$二重态那样变换，然后把一个与

$$\overline{L}\tilde{\phi}\nu_R + \overline{\nu_R}\tilde{\phi}^+ L = (\overline{\nu_L}\overline{e_L})\begin{pmatrix}\phi_0\\ -\phi_-\end{pmatrix}\nu_R + \overline{\nu_R}(\phi_0 - \phi_+)\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} \tag{6.16}$$

$$= (\overline{\nu}\nu)\phi_0 - (\overline{e_L}\nu_R)\phi_- - (\overline{\nu_R}e_R)\phi_+$$

成正比的项加到(6.13)式中。该式的后两项可以在么正规范中变换掉，而第一项使中微子获得质量。然而，为了简单，我们没有把中微子质量引进来。

对于物质场，取其拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_0 = \overline{L}i\partial\!\!\!/ L + \overline{R}\partial\!\!\!/ R + (\partial\phi)^+ \cdot (\partial\phi) - V(\phi^+\phi) -$$

$$-\frac{m}{\rho_0}(\overline{L}\phi R + \overline{R}\phi^+ L), \tag{6.17}$$

$$V(\phi^+\phi) = \lambda(\phi^+\phi - \rho_0)^2,$$

式中ρ_0，λ是实的正参数，m是电子的物理质量。

6.2 规范场

1. 规范化的$SU(2)\times U(1)$

拉格朗日密度(6.17)在$SU(2)$作用下是整体不变的。$SU(2)$群的生成元一般用$\boldsymbol{t}$代表，而在基础表示中则用$\boldsymbol{\tau}/2$代表。整体规范变换是：

$$L\to e^{-i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}L,\quad \phi\to e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\tau}/2}\phi,$$
$$R\to R. \tag{6.18}$$

除了$SU(2)$以外，这个拉格朗日密度在L和R各自独立地做如下位相变换下也是不变的：

$$L\to e^{-i\theta}L,\quad R\to e^{-i\theta'}R,$$
$$\phi\to e^{-i(\theta-\theta')}\phi. \tag{6.19}$$

这些变换组成一个$U(1)\times U(1)$群。我们可以把其中一个$U(1)$群的生成元看做轻子数N，而把另一个$U(1)$群的生成元叫做弱超荷t_0：

$$L=e^{-i(\alpha t_0+\beta N)}L\qquad \left(t_0=-\frac{1}{2},\ N=1\right),$$
$$R=e^{-i(\alpha t_0+\beta N)}R\qquad (t_0=-1,\ N=1), \tag{6.20}$$
$$\phi=e^{-i(\alpha t_0+\beta N)}\phi\qquad \left(t_0=\frac{1}{2},\ N=0\right).$$

对于N的规定按照通常的惯例，t_0满足如下规则

$$Q=t_3+t_0, \tag{6.21}$$

其中Q是电荷，它以一个电子的电荷大小为单位。有证据表明，相应于轻子数的$U(1)$不是一种定域规范对称性，因为实验上观察到它是一个不破缺的对称性。假如把它也规范化，那就还要有一个与轻子数耦合的无质量规范场，然而却从来没有被观测到

过。

把 $SU(2)\times U(1)$ 规范化就可以得到温伯格-萨拉姆模型，其中的 $U(1)$ 是由弱超荷生成的。为研究这个规范场的性质，我们仍然只考虑一个轻子二重态，因为再添加一些二重态不会改变规范场。

为了把 $SU(2)\times U(1)$ 对称性规范化，我们把每一个生成元都同一个规范场联系起来，它们的符号如表 6.1 所示。定域规范不变的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(G^{\mu\nu}\cdot G_{\mu\nu} + H^{\mu\nu}H_{\mu\nu}) + \overline{L}i\not{D}L + \overline{R}i\not{D}R$$

$$+ (D\phi)^{+}\cdot(D\phi) - V(\phi^{+}\phi) + \frac{m}{\rho_0}(\overline{L}\phi R + \overline{R}\phi^{+}L)。\tag{6.22}$$

协变微商 D^{μ} 定义为

$$D^{\mu} = \partial^{\mu} + ig\boldsymbol{W}^{\mu}\cdot\boldsymbol{t} + ig'W_0{}^{\mu}t_0,\tag{6.23}$$

其中 g 和 g' 是两个独立的规范耦合常数。

表6.1 温伯格-萨拉姆模型中的规范场

群	生成元	规范场	场张量
$SU(2)$	$\mathbf{t}$	W^{μ}	$G^{\mu\nu} = \partial^{\mu}W^{\nu} - gW^{\mu}\times W^{\nu}$
$U(1)$	t_0	W_0	$H^{\mu\nu} = \partial^{\mu}W_0{}^{\nu} - \partial^{\nu}W_0{}^{\mu}$

我们要求只有一个无质量的中性规范场，即电磁场 A^{μ}，它与电荷 eQ 耦合，而 Q 由 (6.21) 式给出。一般说来，它是 W_3^{μ} 和 W_0^{μ} 的线性组合。因此，我们设

$$W_3^{\mu} = Z^{\mu}\cos_{W}\theta + A^{\mu}\sin\theta_{W},$$

$$W_0^{\mu} = -Z^{\mu}\sin\theta_{W} + A^{\mu}\cos\theta_{W}。\tag{6.24}$$

由此解出 A^{μ} 和 Z^{μ} 得到

$$A^\mu = W_0^\mu \cos\theta_W + W_3^\mu \sin\theta_W,$$
$$(6.25)$$
$$Z^\mu = -W_0^\mu \sin\theta_W + W_3^\mu \cos\theta_W,$$

其中 θ_W 称为温伯格角，它是一个将由实验确定的自由参数。

给定了 θ_W 后，要求 A^μ 是电磁场则在 g 和 g' 之间建立了一种关系，它可以用如下方法导出。把（6.23）改写成

$$\begin{aligned} D^\mu = \partial^\mu &+ ig(W_1^\mu t_1 + W_2^\mu t_2) \\ &+ i(gt_3 \sin\theta_W + g' t_0 \cos\theta_W) A^\mu \\ &+ i(gt_3 \cos\theta_W - g' t_0 \sin\theta_W) Z^\mu. \end{aligned} \tag{6.26}$$

要求 A^μ 的系数为 eQ，我们就得到下列条件

$$gt_3 \sin\theta_W + g' t_0 \cos\theta_W = e(t_3 + t_0), \tag{6.27}$$

其中 $-e$ 是电子的电荷（$e^2/4\pi\hbar c \cong 1/137$）。由此可知

$$e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W, \tag{6.28}$$

或

$$\begin{aligned} g'/g &= \tan\theta_W, \\ e &= gg'/(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

利用这些关系式，可以把协变微商写成下列形式

$$D^\mu = \partial^\mu + ig(W_1^\mu t_1 + W_2^\mu t_2) + ieQA^\mu + igQ'Z^\mu, \tag{6.30}$$

式中，中性荷矩阵 Q' 定义为

$$Q' = t_3 \cot\theta_W - t_0 \tan\theta_W. \tag{6.31}$$

为了研究规范场的质量，取么正规范最方便，在那里

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

其中 ρ 是一个实场[注a]。我们可以写成

$$D^\mu \phi = \left\{ \partial^\mu + ig\left[\frac{1}{2}(W_1^\mu - iW_2^\mu)\tau_+ + \frac{1}{2}(W_1^\mu + iW_2^\mu)\tau_- + W_3^\mu \tau_3\right]\right.$$

[注a] 更习惯的作法是在（6.32）式中写成 $\rho/\sqrt{2}$ 而不是 ρ。我们为了避免出现太多的因子2，简单地就写成了 ρ。

$$+ig'W_0^\mu t_0\Big\}\begin{pmatrix}0\\ \rho\end{pmatrix} \tag{6.33}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}ig(W_1^\mu-iW_2^\mu)\rho\\ \partial^\mu\rho-\frac{ig}{2\cos\theta_W}Z^\mu\rho\end{pmatrix}.$$

因此，在拉格朗日密度中产生质量的希格斯场动能项取下列形式：

$$(D^\mu\phi)^+(D_\mu\phi)=\frac{1}{4}g^2\rho^2\left[(W_1^\mu W_{1\mu}+W_2^\mu W_{2\mu})+\frac{Z^\mu Z_\mu}{\cos^2\theta_W}\right] + \partial^\mu\rho\partial_\mu\rho. \tag{6.34}$$

注意，上式中 A^μ 没有出现，这是因为在 (6.32) 式中 ϕ 的带电分量已经变换掉了。所以，A^μ 就是所希望的无质量场。借助么正规范中的这些场，并使用一些意义明显的简写符号，拉格朗日密度为：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})+\frac{1}{4}g^2\rho^2\left(W_1^2+W_2^2+\frac{Z^2}{\cos^2\theta_W}\right) - \overline{\nu_L}i\not{D}\nu_L+\overline{e}\left(i\not{D}-\frac{\rho}{\rho_0}m\right)e + \partial\rho\cdot\partial\rho-\lambda(\rho^2-\rho_0^2)^2, \tag{6.35}$$

场 $W_\pm^\mu$、Z^μ 以及希格斯场 $\eta=\rho-\rho_0$ 的质量 m_W、m_Z 和 m_H 由下列各式给出

$$m_W{}^2=\frac{1}{2}g^2\rho_0^2,\quad m_Z/m_W=1/\cos\theta_W,\quad m_H=2\lambda^{\frac{1}{2}}\rho_0. \tag{6.36}$$

构造一个所有的质量都由对称性自发破缺而获得的规范理论，其动机是要得到一个可重整的量子场论。

2. 常数的确定

费米常数由

$$G=\frac{g^2}{2^{5/2}m_W^2}=1.165\times10^{-5}(\mathrm{GeV})^{-2} \tag{6.37}$$

给出。由（6.36）式求出g^2然后代入到（6.37）式中，得到

$$m_W^2=2^{5/2}\rho_0^2m_W^2G. \tag{6.38}$$

因此[注b]

$$\rho_0^2=2^{-3/2}G^{-1},\ \rho_0=174\mathrm{GeV}. \tag{6.39}$$

把（6.28）式代入（6.37）式中，我们得到

$$m_W^2=\frac{e^2}{2^{5/2}G\sin^2\theta_W},$$

$$m_W\cong\frac{40}{\sin\theta_W}\mathrm{GeV}/c^2. \tag{6.40}$$

实验上已经测量出温伯格角为[4]

$$\sin^2\theta_W=0.218\pm0.020. \tag{6.41}$$

利用这个值，我们得到

$$m_W\cong80\ \mathrm{GeV}/c^2,\ m_Z\cong90\ \mathrm{GeV}/c^2. \tag{6.42}$$

希格斯场与电子耦合非常弱：

$$\frac{m_e}{\rho_0}=3.86\times10^{-6}. \tag{6.43}$$

希格斯场质量确定不出来，它取决于未知的无量纲参数λ。

3. 相互作用

把么正规范下的（6.35）式改写为如下形式

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_V+\mathscr{L}_F+\mathscr{L}_H+\mathscr{L}'+\mathscr{L}'', \tag{6.44}$$

其中前三项分别代表矢量场、费米场和希格斯场的“自由”拉格朗日密度：

$$\mathscr{L}_V=\frac{-1}{4}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})+\frac{1}{2}m_W^2(W_1^2+W_2^2)+\frac{1}{2}m_Z^2Z^2,$$

[注b] 经常引用的希格斯场真空期待值为

$$\langle\phi\rangle=\sqrt{2}\rho_0=247\ \mathrm{GeV}.$$

$$\mathscr{L}_F = \overline{L} i \not\partial L + \overline{R} i \not\partial R - m_e(\overline{L}R - \overline{R}L),$$

$$\mathscr{L}_H = \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - m_H^2 \eta \left(1 + \frac{\eta}{2\rho_0}\right)^2, \tag{6.45}$$

其中η是么正规范下实的希格斯场，在此规范下$\phi(x)$有(6.32)的形式，而且

$$\rho(x) = \rho_0 + \eta(x). \tag{6.46}$$

$\mathscr{L}'$和$\mathscr{L}''$都是相互作用项，其中$\mathscr{L}'$包含电磁流和弱流，而$\mathscr{L}''$包含希格斯场与其它场之间的相互作用

$$\mathscr{L}'' = [m_W^2(W_1^2 + W_2^2) + m_Z^2 Z^2]\frac{\eta}{\rho_0}\left(1 + \frac{\eta}{2\rho_0}\right) + m(\bar{e}e)\frac{\eta}{\rho_0}, \tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}' &= g\,\overline{\psi}(W_1 t_1 + W_2 t_2)\psi + e\overline{\psi}Q\not{A}\psi + e\overline{\psi}Q'\not{Z}\psi \\ &= \frac{g}{2}(W_1^\mu J_{1\mu}^{ch} + W_2^\mu J_{2\mu}^{ch}) + eA^\mu J_\mu^{em} + eZ^\mu J_\mu^{neut},\end{aligned} \tag{6.48}$$

式中

$$\begin{aligned} &J_{i\mu}^{ch} = \overline{L}\tau_i\gamma_\mu L \qquad (i = 1, 2), \\ &J_\mu^{em} = \overline{\psi}Q\gamma_\mu\psi, \quad J_\mu^{neut} = \overline{\psi}Q'\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \tag{6.49}$$

规范场的“自由”拉格朗日密度是

$$\mathscr{L}_V = -\frac{1}{4}(G\cdot G + H\cdot H) + \frac{1}{2}m_W^2(W_1^2 + W_2^2) + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^2. \tag{6.50}$$

为了把它更明显地写出来，我们采用以下的符号：

$$\begin{aligned} (A\times B)^{\mu\nu} &\equiv A^\mu B^\nu - A^\nu B^\mu, \\ (A\times B)^2 &\equiv (A\times B)^{\mu\nu}(A\times B)_{\mu\nu}, \\ (A\times B)\cdot(C\times D) &\equiv (A\times B)^{\mu\nu}(C\times D)_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_V = &-\frac{1}{4}[(\partial\times W_1)^2 + (\partial\times W_2)^2 + (\partial\times A)^2 + (\partial\times Z)^2] \\ &+ \frac{1}{2}m_W^2(W_1^2 + W_2^2) + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^2 \end{aligned} \tag{6.52}$$

$$+\frac{1}{2}g[(\partial\times W_1)\cdot(W_2\times W_3)+(\partial\times W_2)\cdot(W_3\times W_1)$$
$$+(\partial\times W_3)\cdot(W_1\times W_2)]$$
$$-\frac{1}{4}g^2[(W_1\times W_2)^2+(W_2\times W_3)^2+(W_3\times W_1)^2],$$

式中W_3^μ由（6.24）式给出。g 和 g^2 量级的那些项描写规范场之间的相互作用，它们是由规范群的非阿贝尔结构引起的。注意，Z^μ 不与 A^μ 直接相互作用，这正是我们对于一个中性场所期望的。

带电的规范场 W_1^μ 和 W_2^μ 都有电磁相互作用。（6.52）式中包含这些相互作用的部分可写成下列形式

$$\mathscr{L}_W^{em}=eW_1{}^\mu W_2{}^\nu F_{\mu\nu}+e[(\partial\times W_1)^{\mu\nu}W_{2\mu}-(\partial\times W_2)^{\mu\nu}W_{1\mu}]A_\nu$$
$$+\frac{1}{2}e^2[W_1{}^\mu W_2{}^\nu+W_2{}^\mu W_1{}^\nu-g^{\mu\nu}(W_1^2+W_2^2)]A_\mu A_\nu, \tag{6.53}$$

式中$F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$。用具有确定电荷的场

$$W=2^{-1/2}(W_1+iW_2),$$
$$W^*=2^{-1/2}(W_1-iW_2); \tag{6.54}$$

把（6.53）式改写，则可以得到

$$\mathscr{L}_W^{em}=-ie(W_\nu{}^*\overleftrightarrow{\partial_\mu}W^\nu)A^\mu-ieW^{*\mu}W^\nu F_{\mu\nu}$$
$$-ie(W^{*\mu}W^\nu-\text{c.c.})A_\nu \tag{6.55}$$
$$+e^2(W^{*\mu}W^\nu-g^{\mu\nu}W^{*\lambda}W_\lambda)A_\mu A_\nu.$$

第二项导致磁矩和电四极矩[5]。一般说来，形式为$\mathscr{L}_W^{em}=-ie\kappa W_\mu{}^*W_\nu F^{\mu\nu}$的项导致

$$\text{磁偶极矩}=(1+\kappa)\frac{e}{2m_W}\boldsymbol{s},$$

$$\text{电四极矩}=\int d^3x\rho(3Z^2-r^2)=\frac{-e\kappa}{m_W{}^2}, \tag{6.56}$$

式中 $\boldsymbol{s}$ 是自旋矢量，ρ 是$s_z=1$ 态上静电荷密度。由于 $\kappa=1$，所

以 W 玻色子的 g 因子就等于2。

(6.55)式的复杂结构实际上有着简单的用处，当把(6.55)式和W场的动能项加在一起时，我们就得到带电矢量场理论的拉格朗日密度：

$$-\frac{1}{4}[(\partial\times W_1)^2+(\partial\times W_2)^2]+\mathscr{L}_W^{em}$$

$$=-\frac{1}{2}(D\times W)^*\cdot(D\times W)-ieW^{*\mu}W^\nu F_{\mu\nu},$$

$$D^\mu\equiv\partial^\mu-ieA^\mu.$$

6.3 一般理论

1. 质量项

为了把如第一章所描述的三个家族中所有的夸克和轻子都包括进来，我们要在 (6.22) 式中做两个改动。

首先，把 R 和 L 的定义扩充到包括所有的夸克和轻子

$$L=\{l_{L\alpha},\ q_{L\alpha}\}\qquad(\alpha=1,2,3)\ ,\qquad(6.57)$$

$$R=\{l_{R\alpha},\ q_{R\alpha}\}\qquad(\alpha=1,2,3)\ ,$$

式中符号的定义在表 6.2 中给出。其次，把质量项修改成使我们能规定任意的质量。定域规范不变的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}\Big(G\cdot G+H\cdot H\Big)+\overline{L}\,i\not{D}L+\overline{R}i\not{D}R+(D\phi)^+\cdot(D\phi)$$

$$-V(\phi^*\phi)+\mathscr{L}_{mass}\qquad(6.58)$$

质量项再分成轻子和夸克的贡献

$$\mathscr{L}_{mass}=\mathscr{L}_{mass}^{轻子}+\mathscr{L}_{mass}^{夸克}\qquad(6.59)$$

其中，轻子的贡献由下式给出

$$\mathscr{L}_{mass}^{轻子}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\overline{l_{L\alpha}}\frac{\phi}{\rho_0}m_{\alpha\beta}l_{R\beta}+\text{c.c.},\qquad(6.60)$$

式中 $m_{\alpha\beta}$是一个任意的复常数的质量矩阵，在么正规范中，ϕ 由

(6.32) 式给出，我们有

$$\mathscr{L}^{轻子}_{质量} = \frac{\rho}{\rho_0}(\overline{e_L}\ \overline{\mu_L}\ \overline{\tau_L})\, m \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} + \text{c.c.} \tag{6.61}$$

一个任意的复矩阵可以化成对角形式，而且有着实的非负对角元。这就是说，存在非奇异矩阵 A 和 B，使

$$AmB^{-1} = D, \tag{6.62}$$

其中 D 是对角矩阵，具有非负的对角元。为了证明这一点，注意到 m^+m 是厄米的，具有实的非负本征值，mm^+ 亦然。m^+m 的本征值和 mm^+的相同。所以，存在非奇异矩阵 A 和 B，使得

$$\begin{aligned} Amm^+A^{-1} &= D^2, \\ Bm^+mB^{-1} &= D^2, \end{aligned} \tag{6.63}$$

这些方程的解是

$$m = A^{-1}DB,\ m^+ = B^{-1}DA. \tag{6.64}$$

这样一来，我们只要对右手粒子和左手粒子做独立的线性变换

$$\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1}\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}, \tag{6.65}$$

$$\begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1}\begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix},$$

就使得质量矩阵对角化

$$\mathscr{L}^{轻子}_{质量} = (\overline{e}\ \ \overline{\mu}\ \ \overline{\tau})\begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}\frac{\rho}{\rho_0}, \tag{6.66}$$

其中 m_e、m_μ、m_τ 都是任意的非负实参数。要注意，变换(6.65)把不同家族的轻子混合起来。当然，在$\mathscr{L}$的动能部分，即(6.58)

式中的 $(\overline{L}i\not{D}L+\overline{R}i\not{D}R)$ 项也必须做同样的变换．其结果是把电荷改变的流按下列方式变换：

$$(\bar{e}_L\ \bar{\mu}_L\ \bar{\tau}_L)\gamma^\mu\begin{pmatrix}\nu_L\\ \nu'_L\\ \nu''_L\end{pmatrix}\longrightarrow(\bar{e}_L\ \bar{\mu}_L\ \bar{\tau}_L)\gamma^\mu A\begin{pmatrix}\nu_L\\ \nu'_L\\ \nu''_L\end{pmatrix}. \tag{6.67}$$

不改变电荷的流保持不变，因为它们的形式是 $\overline{L}\gamma^\mu L+\overline{R}\gamma^\mu R$．

(6.66) 式和 (6.67) 式中的符号 e、μ、τ 代表质量的本征态，因为用这些相应的基，质量矩阵是对角的．所以，物理的中微子是

$$\begin{pmatrix}\tilde{\nu}\\ \tilde{\nu}'\\ \tilde{\nu}''\end{pmatrix}_L=A\begin{pmatrix}\nu\\ \nu'\\ \nu''\end{pmatrix}_L. \tag{6.68}$$

但是它与原来的中微子没有什么差别，因为所有的中微子都是无质量的．因此，可以把 ν 上面的～符号都去掉．在温伯格-萨拉姆模型中，当假定所有的中微子都是无质量时，不同代的物理轻子没有混合．例如，$\mu\to e+\gamma$ 是被禁戒的．

现在，我们再来讨论夸克质量．为了给出在弱超荷作用下不变的质量项，要把表 6.2 中由 q_R 和 $\overline{q_R}$ 所代表的夸克分别与希格斯二重态 ϕ 及其共轭二重态 $\tilde{\phi}$ 按下列方式耦合：

$$\mathscr{L}_{\text{mass}}^{\text{夸克}}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\left(\overline{q_{L\alpha}}\frac{\phi}{\rho_0}M_{\alpha\beta}q_{R\beta}+\overline{q_{L\alpha}}\frac{\tilde{\phi}}{\rho_0}\widetilde{M}_{\alpha\beta}\tilde{q}_{R\beta}\right)+\text{c.c.}, \tag{6.69}$$

其中 $\tilde{\phi}$ 的定义在 (6.15) 式中给出，而 M 和 $\widetilde{M}$ 是任意的复常数矩阵．我们总认为对夸克的每一种味的色指标应求和．在幺正规范内，该式可写为

$$\mathscr{L}_{\text{mass}}^{\text{夸克}}=\frac{\rho}{\rho_0}\left[(\bar{d}_L\ \bar{s}_L\ \bar{b}_L)M\begin{pmatrix}d_R\\ s_R\\ b_R\end{pmatrix}+(\overline{u_L}\ \overline{c_L}\ \overline{t_L})\widetilde{M}\begin{pmatrix}u_R\\ c_R\\ t_R\end{pmatrix}\right]+\text{c.c.},$$

(6.70)

通过下列变换，我们可以把 M 和 $\widetilde{M}$ 对角化

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L \longrightarrow A_L^{-1}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L \longrightarrow B_L^{-1}\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L,$$

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_R \longrightarrow A_R^{-1}\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_R, \quad \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_R \longrightarrow B_R^{-1}\begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_R, \tag{6.71}$$

式中 A_L、A_R、B_L、B_R 是满足下述要求的矩阵

$$A_L M A_R^{-1} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix},$$

$$B_L \widetilde{M} B_R^{-1} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}, \tag{6.72}$$

其中的对角元都是任意的实的非负参数。利用这一结果我们得到

$$\mathscr{L}_{\text{mass}}^{\text{夸克}} = \frac{\rho}{\rho_0}\sum_q m_q \bar{q}q, \tag{6.73}$$

式中 q 代表夸克的四分量狄拉克旋量，m_q 是它的质量参数，求和是对所有的六种味 u、d、s、c、b、t（还要加上每种味的色求和）。这些夸克现在都是质量的本征态。

在拉格朗日密度的动能部分中变换（6.71）式保持电磁流和中性流不变，但使电荷改变的夸克流变成如下形式

$$J_\mu^{\text{ch}} \propto (\bar{d}\ \bar{s}\ \bar{b})_L \gamma_\mu C \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L, \tag{6.74}$$

其中夸克的符号指的是质量本征态，而 C 是 3×3 矩阵

$$C = A_L B_L^{-1}, \tag{6.75}$$

它具有以下的性质

$$C^{+}C=1, \qquad |\det C|^{2}=1. \qquad (6.76)$$

由于假定夸克靠它们的强相互作用而禁闭，所以夸克质量的含义是不明确的。当我们在第十二章讨论量子色动力学时，再回过来研究这个问题。

表 6.2 **量子数**

下脚标 L，R 分别表示左右手场，夸克符号上面的波线～表示广义的卡比玻混合态，

温伯格角用 θ $\left(\sin^2\theta\cong\frac{1}{4}\right)$ 表示。

电荷 $=eQ$，$Q=t_3+t_0$。

中性荷 $=eQ'$。$Q'=t_3\cot\theta-t_0\tan\theta$.

粒子				t	t_3	t_0	Q	$Q'\sin 2\theta$	Q' $\sin^2\theta=1/4$
轻子 l_{Le}:	ν_L	ν'_L	ν''_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
	e_L	μ_L	τ_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-1+2\sin^2\theta$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
l_{Re}:	e_R	μ_R	τ_R	0	0	-1	-1	$2\sin^2\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
夸克 q_{Le}:	$\tilde{u}_L$	$\tilde{c}_L$	$\tilde{t}_L$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$1-\frac{4}{3}\sin^2\theta$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$
	d_L	s_L	b_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$-1+\frac{2}{3}\sin^2\theta$	$\frac{-5}{3\sqrt{5}}$
q_{Re}:	u_R	c_R	t_R	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-4}{3}\sin^2\theta$	$\frac{-2}{3\sqrt{3}}$
q_{Re}:	d_R	s_R	b_R	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\sin^2\theta$	$\frac{1}{3\sqrt{3}}$
希格斯	ϕ_+			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$1-2\sin^2\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
	ϕ_0			$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$

2．卡比玻角

为了弄清（6.74）式中矩阵 C 的作用，我们先略去 b 夸克和 t 夸克，于是

$$J_\mu^{ch} \propto (\overline{d}\ \ \overline{s})_L \gamma_\mu C \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L . \tag{6.77}$$

2×2 矩阵 C 的最一般形式则为

$$C=\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times[SU(2)\text{矩阵}]. \tag{6.78}$$

第一个因子可以略去，因为它可以吸收到重新定义的 u 和 c 的相因子中去。与欧拉角 α、β、γ 的转动相应的一个 $SU(2)$ 矩阵，其最普遍的形式为

$$C=e^{-i\alpha\tau_3/2}e^{-i\beta\tau_2/2}e^{-i\gamma\tau_3/2}. \tag{6.79}$$

它的第一个和最末一个因子又可以分别吸收到重新定义的（d、s）和（u、c）的相因子中。因此，我们可以取 $C=e^{-i\beta\tau_2/2}$，令 $\theta=\beta/2$，我们得到

$$C=\begin{matrix} \\ d \\ s \end{matrix}\overset{\begin{matrix} u \quad\quad c \end{matrix}}{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}, \tag{6.80}$$

其中 θ 是一个要由实验确定的任意角度，它就是早在第一章就讨论过的卡比玻角，其实验值为

$$\theta \cong \frac{1}{4}. \tag{6.81}$$

由于 C 是实的，所以拉格朗日密度仍是实的，而且在时间反演下是不变的。所以根据 CPT 定理，它在 CP 下也是不变的。

3．川石-增川阵矩

3×3 情况下 C 的最普遍形式，最早是由川石（Kobayashi）

和增川（Maskawa）[6]得到的。根据（6.76）式，C可以通过重新定义夸克场的相位而约化为一个$SU(3)$矩阵。因此它是矩阵$e^{i\theta_1\lambda_1}$，…，$e^{i\theta_8\lambda_8}$乘积之和，其中λ_1，…，λ_8为盖尔曼矩阵，它们当中的λ_3和λ_8被取为对角矩阵。所以，有8个自由参量θ_1，…，θ_8。我们可以把C写成以下形式

$$C=e^{i\lambda_3\theta_3}e^{i\lambda_8\theta_8}Ue^{i\lambda_3\theta_3'}e^{i\lambda_8\theta_8'},\tag{6.82}$$

式中U是一个只包含4个参数的$SU(3)$矩阵，从而可以用除λ_3和λ_8外的任何4个生成元构成，为了方便，我们选取它们为λ_1、λ_2、λ_5和λ_7。我们注意到，由于$[\lambda_2, \lambda_5]=i\lambda_7$，所以$\lambda_2$、$\lambda_5$和$\lambda_7$生成一个转动群。因此，可以用带有三个任意参量的三个正交矩阵和一个带有一个任意参数且行列式为1的么正矩阵一起构成矩阵U：

$$C=R_2\widetilde{U}R_1R_3,\tag{6.83}$$

其中

$$\widetilde{U}=\begin{pmatrix} e^{-i\delta/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta/3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2i\delta/3} \end{pmatrix}=e^{-i\delta/3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix},\tag{6.84}$$

和

$$R_1=\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix},\quad R_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix},\tag{6.85}$$

$c_i\equiv\cos\theta_i$，$s_i\equiv\sin\theta_i$（$i=1, 2, 3$）。

（6.84）式中的总相因子可以吸收到夸克场中。因此

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & s_2 \\ 0 & -s_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & s_3 \\ 0 & -s_3 & c_3 \end{pmatrix}\tag{6.86}$$

$$
\begin{array}{c} d \\ = s \\ b \end{array}
\begin{pmatrix}
c_1 & s_1c_3 & s_1s_3 \\
-s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2c_3 + s_2c_3e^{i\delta} \\
s_1s_2 & -c_1c_2c_3 - c_2s_3e^{i\delta} & -c_1c_2c_3 + c_2c_3e^{i\delta}
\end{pmatrix}.
$$

（矩阵各列分别对应 u、c、t。）

在文献中，人们可能发现 (c_2, s_2) 与 $(c_3, \pm s_3)$ 互换，$-\delta$ 代替了 δ。有三个任意角 θ_1，θ_2，θ_3，其中的 θ_1 就是卡比玻角，有一个任意的位相 δ，它使得拉格朗日密度变成非实的。因此，非零的 δ 值破坏时间反演不变性。根据 CPT 定理，它也就破坏 CP 不变性[注 c]。由实验数据精确定出的参数仅有[7]：

$$
|c_1| = 0.9737 + 0.0025, \tag{6.87}
$$
$$
|s_1c_2| = 0.219 \pm 0.003.
$$

除了把实验数据与一些理论假设结合在一起得到的一些限制[8]以外，参数 θ_3 和 δ 实质上是未知的。

我们把完整的拉格朗日密度列在表 6.3 中，以此作为温伯格-萨拉姆模型的总结。这个表不必加以解释即可一目了然。

4. 孤粒子

在温伯格-萨拉姆模型中没有静态拓扑孤粒子。规范群是 $G = SU(2) \times U(1)$，而它的元素的形式为

$$
g \in G, \quad g = e^{-i\omega\cdot t}e^{-i\nu t_0}
$$

小群是 $H = [U(1)]_{em}$，它的元素为

$$
h \in H, \qquad h = e^{-i\theta Q} = e^{-i\theta(t_3 + t_0)}.
$$

显然，H 不是 G 的一正规子群。对于固定的 ω 和 ν，H 的陪集为

$$
gH = \{e^{-i\omega\cdot t}e^{-i\nu t_0}\,e^{-i\theta Q} \mid -\infty < \theta < \infty\}
$$

取欧勒角 α、β、γ 作为参数把 $e^{-i\omega\cdot t}$ 表示为

[注c] 由于 δ 只出现在包含重夸克 c 和 t 的味混合分量中，所以从 K^0 衰变中观测到的 CP 破坏大小很难给出 δ 的数值范围。在 K^0 衰变中，它只通过这些重夸克的虚效应而做出贡献。于是，观测到的很小的 CP 破坏并不一定意味着 δ 是很小的。

$$e^{-i\omega\cdot t}=e^{-i\alpha t_3}e^{-i\beta t_2}e^{-i\gamma t_3}.$$

利用 $t_0=Q-t_3$，我们得到

$$e^{-i\omega\cdot t}e^{-i\nu t_0}e^{-i\theta Q}=e^{-i\alpha t_3}e^{-i\beta t_2}e^{-i(\gamma-\theta)t_3}e^{-i(\nu+\theta)Q}.$$

注意到 $\gamma-\nu$ 和 $\nu+\theta$ 是两个独立的参数，我们可以把陪集的集合写成

$$gH=\{e^{-i\omega'\cdot t}\ e^{-i\theta' Q}\,|\,-\infty<\theta'<\infty\},$$

$$G/H=\{e^{-i\omega'\cdot t}\}.$$

由于 G/H 有着 $SU(2)$ 的拓扑结构，所以 $\pi_2(G/H)=0$。

半经典的非拓扑孤粒子的确存在。其中有一类是由空间的一个环面组成，在这部分空间范围内希格斯场被 Z 场的一个量子排挤出去。它们被称为涡旋子（Vorticon），其质量估计为 3000 GeV/c^2[9]数量级。

表 6.3 温伯格-萨拉姆模型的拉格朗日密度

$\mathscr{L}=\mathscr{L}_V+\mathscr{L}_E+\mathscr{L}_H+\mathscr{L}_{int}$ [$\mathscr{L}_V$ 是由（6.50）和（6.52）给出的]
$\mathscr{L}=\overline{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi$
$\mathscr{L}_H=\not{\partial}\eta\cdot\not{\partial}\eta-m^2{}_H\eta^2$
$\mathscr{L}_{int}=\mathscr{L}_W+\mathscr{L}_{VF}+\mathscr{L}_{HV}+\mathscr{L}_{HF}+\mathscr{L}_{HH}$
$\mathscr{L}_{VV}=\frac{1}{2}g[(\partial\times\boldsymbol{W}_1)\cdot(\boldsymbol{W}_2\times\boldsymbol{W}_3)+(\partial\times\boldsymbol{W}_2)\cdot(\boldsymbol{W}_3\times\boldsymbol{W}_1)+(\partial\times\boldsymbol{W}_3)\cdot(\boldsymbol{W}_1\times\boldsymbol{W}_2)]-\frac{1}{4}g^2[(W_1\times W_2)^2+(W_2\times W_3)^2+(W_3\times W_1)^2]$
$\mathscr{L}_{VF}=\frac{1}{2}g(W_1\cdot J_1{}^{ch}+M_2\cdot J_2{}^{ch})+eA\cdot J^{em}+\frac{g}{\cos\theta_W}Z\cdot J^{neut}$
$J_\mu{}^{ch}=\overline{l_L}\tau_i\gamma_\mu l_L-\overline{q_L}\tau_i\gamma_\mu Cq_1=\overline{\psi}\tau_i\gamma_\mu\frac{1-\gamma_5}{2}C\psi$

$$J_\mu^{em} = \bar{\psi} Q \gamma_\mu \psi$$

$$J_\mu^{neut} = \bar{\psi} Q' \gamma_\mu \psi$$

$$\mathscr{L}_{HV} = [m_W^2(W_1^2 + W_2^2) + m_Z^2 Z^2] \frac{\eta}{\rho_0}\left(1 + \frac{\eta}{2\rho_0}\right)$$

$$\mathscr{L}_{HF} = (\bar{\psi} M \psi)\frac{\eta}{\rho_0}$$

$$\mathscr{L}_{HH} = -\frac{1}{6}\rho\lambda_0\eta^3 - \frac{1}{24}\lambda\eta^4$$

6.4 评 论

温伯格-萨拉姆模型的实验证实，迄今仅限于低于规范玻色子理论质量的能区。在这个能量范围内，这种相互作用与流-流相互作用是不可区分的。正是在这样的范围内，带电流和中性流的结构已经得到了证明，温伯格角也已被测量过了。然而，这个理论有两个重要方面至今还未得到检验：

1．具有预言质量的 W 和 Z 粒子存在[译者注]；

2．具有预言耦合的希格斯玻色子存在。

如果规范玻色子 W 和 Z 不存在，或者如果它们存在但质量与预言值不符，则规范概念就需要重新考察，特别是象比约肯(Bjorken)[10]，黄和樱井 (Sakurai)[11]都曾指出，有一些规范理论的替代模型，它们能得到目前所有的实验结果。

有一种可能性引起了人们的兴趣，那就是在温伯格-萨拉姆

[译者注] W 和 Z 粒子已经在 1983 年发现，质量与预言值完全符合，参看 G. Arnison, *et al*. *Phys. Lett.* 122B(1983)103, UA1; *ibid*. 126B(1983)398 P. Bagnaia, *et al*. *ibid*. 122B(1983)476, UA2; *ibid* 129B(1983)130.

模型中，我们把错误的对称性规范化了，这个模型中的规范玻色子实际上都是些束缚态，它们与夸克和轻子的地位相当。束缚力产生于某种还不知道的来源，或许存在某种更深层次规范对称性。我们可以用强相互作用理论作个类比。很早以前，我们还不知道关于夸克的知识时，樱井[12]曾提出过一个看法，认为强相互作用起源于规范化的同位旋 $SU(2)$ 和重子数 $U(1)$，它们的规范玻色子分别为 ρ 介子和 ω 介子。在不破坏可重整性而又给出这些粒子的质量方面，他的建议遇到了困难。那时希格斯机制还不知道。

要是樱井当时就知道了希格斯机制，他很可能会想出一个可重整理论，哪怕是用上大量的任意的参数。那么，强相互作用唯象学的"大工业"也就会诞生了（因为人们还不会真正去计算一个有强耦合理论中的任何东西）。这就象雷奇（Regge）唯象理论一样，它几乎与任何实验都符合，只有当大多数人都相信了夸克时才被冷落，W 粒子和 Z 粒子可能类似于 ρ 和 ω 介子吗？对于这种可能性，阿博特（Abbort）和法希（Farhi）[13]曾经提出了一个明确的方案。

至于希格斯机制，迄今还没有任何一个实验证据支持存在一个基本的希格斯场，在别的物理模型中唯一类似的概念是超导理论中的金斯伯格-兰道有序参量，这个理论是对库柏对凝聚的一种平均场近似。很可能温伯格-萨拉姆模型中的希格斯场具有类似的性质，用某种更基本的东西代替希格斯场，而且只使用很少几个任意参数，那将会更加优雅动人。

参考文献

[1]关于历史的记述以及参考文献请看格拉肖、温伯格和萨拉姆的诺贝尔演讲.S. L.Glashow, *Rev.Mod. Phys.* 53, 539(1980); S. Weinberg, *ibid*, 52, 515(1980); A. Salam, *ibid*, 52, 525(1980).

[2]G.'t Hooft, *Nuclear Physics*, **B33**, 173(1971); **B35**. 167(1971).
[3]S. L. Glashow, J. Ilipoulos, andl L. Maiani, *Phys. Rev.* **D3**, 1043(1981).
[4]I. Li-de and M. Roos, *Nucl. Phys.* **B167**, 397(1980).
[5]T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **128**, 885(1962).
[6]M. Kobayashi and K. Maskawa, *Prog. Theo. Phys.* **49**, 652 (1975).
[7]R. E. Shrock and L. L. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1692 (1978) .
[8]R. E. Shrock S. B. Treiman and L. L Wang, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1589(1979) .
[9]K. Huang and R. Tipton, *Phys. Rev.* **23**, 3050(1981).
[10]J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **D19**, 335(1979).
[11]P. Q. Hung and J. J. Sakurai, *Nucl. Phys*, **B143**, 81(1978).
[12] J. J. Sakurai, *Ann Phys.* **11**, 1(1960).
[13]L. F. Abbot and E. Farhi, *Phys, Lett*, **B101**, 69(1981) ; *Nucl.Phys.* **B189**, 547(1981).

第七章　路径积分方法

7.1　非相对论量子力学

费曼路径积分方法[1]是系统阐述量子理论的一种方法。它等价于更为熟悉的正则量子化方法，但用于规范理论要方便得多。我们首先通过考虑一维自由度的非相对论量子力学，来介绍这个方法。然后把它推广就是显而易见的事。

在正则量子化方法中，我们用希尔伯特(Hilbert)空间的算符q_{op}和p_{op}，分别代表坐标和共轭动量，它们由以下对易关系定义[注a]：

$$[p_{op},\ q_{op}] = -i\hbar。\tag{7.1}$$

用$|q\rangle$和$|p\rangle$表示这些算符的本征态：

$$\begin{aligned} q_{op}|q'\rangle &= q'|q'\rangle, \\ p_{op}|p'\rangle &= p'|p'\rangle, \end{aligned}\tag{7.2}$$

它们按照下述要求归一化

$$\langle q''|q'\rangle = \delta(q''-q'), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dq'|q'\rangle\langle q'| = 1,$$

$$\langle p''|p'\rangle = 2\pi\hbar\delta(p''-p'), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}|p'\rangle\langle p'| = 1。\tag{7.3}$$

$$\langle p'|q'\rangle = e^{-ip'q'/\hbar}$$

控制该体系时间演化的跃迁振幅：

[注a]　在本章不取$\hbar=1$。

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle \equiv \langle q'' | \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t''-t') H_{op} \right] | q' \rangle , \qquad (7.4)$$

完全确定了体系的动力学行为，式中的 H_{op} 是与时间无关的哈密顿算符，我们可以把 $|q', t'\rangle$ 看成海森堡算符 $q_{op}(t)$ 的本征态，相应的本征值为 q'.

$$q_{op}(t) \equiv e^{itH_{op}/\hbar} q_{op} e^{-itH_{op}/\hbar},$$

$$q_{op}(t)|q', t'\rangle = q' |q', t'\rangle . \qquad (7.5)$$

于是，时间演化由方程式

$$|q', t'\rangle = e^{it'H_{op}/\hbar}|q'\rangle \qquad (7.6)$$

给出。

路径积分方法的目的，是要把跃迁振幅完全用经典的哈密顿量 $H(p,q)$ 来表示，而不必涉及希尔伯特空间的算符和状态。

开始时，我们把时间间隔 $t''-t'$ 分成 N 个等分，以后要取 $N\to\infty$ 极限。令

$$\Delta t \equiv (t''-t')/N,$$

$$\varepsilon \equiv \Delta t/\hbar . \qquad (7.7)$$

我们可以写成

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \langle q'' | e^{-iH_{op}N\varepsilon} | q' \rangle = \langle q'' | (1 - i\varepsilon H_{op})^N | q' \rangle$$

$$= \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q'' | (1 - i\varepsilon H_{op}) | q_{N-1} \rangle \cdots$$

$$\langle q_1 | (1 - i\varepsilon H_{op}) | q' \rangle . \qquad (7.8)$$

接着，我们把被积函数中的一个典型因子改写成

$$\langle q_2 | (1 - i\varepsilon H_{op}) | q_1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \langle q_2 | p_1 \rangle \langle p_1 | (1 - i\varepsilon H_{op}) | q_1 \rangle , \qquad (7.9)$$

并用

$$\langle p | H_{op} | q \rangle \equiv \langle p | q \rangle H(p,q) \qquad (7.10)$$

定义经典的哈密顿量 $H(p,q)$。只要 $H(p,q)$ 不含有 p 与 q 的乘积

项，则上述定义即给出了经典力学哈密顿量和量子力学哈密顿量之间通常的关系。否则，H_{op} 必须取正规乘积，使得所有的 p_{op} 都在所有的q_{op}的左边。利用(7.10)式，我们求得

$$\langle q_2|1-i\varepsilon H_{op}|q_1\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_1}{2\pi\hbar}\langle q_2|p_1\rangle\langle p_1|q_1\rangle[1-i\varepsilon H(p_1,q_1)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_1}{2\pi\hbar}e^{ip_1(q_2-q_1)/\hbar}[1-i\varepsilon H(p_1,q_1)].\tag{7.11}$$

因此

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle=\int\frac{dq_1dp_1}{2\pi\hbar}\cdots\int\frac{dq_{N-1}dp_{N-1}}{2\pi\hbar}\tag{7.12}$$

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}p_n(q_{n+1}-q_n)\right]\prod_{n=1}^{N-1}[1-i\varepsilon H(p_n,q_n)],$$

其中用到了条件

$$q_0\equiv q',\ q_N\equiv q''.\tag{7.13}$$

接下去是这个推导中的关键一步：我们注意到，在（7.12）式中因子（$1-i\varepsilon H$)可以等效地用 $\exp(-i\varepsilon H)$来代替。理由是，我们假设当$N\to\infty$时，$N^{-1}\sum_n H(p_n,q_n)$趋向一个确定的极限：若已知 N 个这样的数 $z_1,\cdots,z_n$，使得 $X\equiv\lim N^{-1}\sum z_n$ 存在，则我们有[注b]

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{z_n}{N}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}e^{z_n/N}=e^X,\tag{7.14}$$

它可以用 z_n 的幂级数展开加以证明。用 exp（$1-i\varepsilon H$）代替（$-i\varepsilon H$)，其优点是：我们现在可以把振幅（7.12）式表示成一些么正振幅的积分。

[注b]在数量级上($1-i\varepsilon H$)与$\exp(-i\varepsilon H)$相同并不是在(7.12）中前者被后者取代的充分理由。例如，要是用$(1+i\varepsilon H)^{-1}$代替（$1-i\varepsilon H$)就是不正确的。

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle=\int\frac{dq_1dp_1}{2\pi\hbar}\cdots\int\frac{dq_{N-1}dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \tag{7.15}$$

$$\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\Delta t\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{p_n(q_{n+1}-q_n)}{\Delta t}-H(p_n,q_n)\right]\right\}.$$

为了趋向极限 $N\to\infty$（或$\Delta t\to 0$），我们采取这样的观点，即：数集 $\{q_1,p_1,\cdots,q_{N-1},p_{N-1}\}$ 是某两个函数 $q(t)$、$p(t)$ 相继取的数值，这两个函数可以是不连续函数。相应地，我们采用下列一些符号：

$$t_n=t'+n\Delta t,\ q_n=q(t_n),\ p_n=p(t_n), \tag{7.16}$$

并且写成

$$(q_{n+1}-q_n)/\Delta t\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\dot{q}(t_n), \tag{7.17}$$

$$\sum_{n=1}^{N-1}f(t_n)\Delta t\xrightarrow[\delta t\to 0]{}\int_{t'}^{t''}dtf(t).$$

这样，我们就可以把跃迁振幅改写成以下形式

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle=\int(Dq)(Dp)\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt[p\dot{q}-H(p,q)],$$

$$q(t')=q',\qquad q(t'')=q''. \tag{7.18}$$

该式代表在 t' 时刻和 t'' 时刻之间，端点的坐标取固定值的情况下，对于动量空间的所有的路径 $p(t)$ 以及坐标空间的所有路径 $q(t)$ 的一个积分。路径空间的体积元由下式表示：

$$(Dq)=\prod_{n=1}^{N-1}dq(t_n),\qquad(Dp)=\prod_{n=1}^{N-1}\frac{dp(t_n)}{2\pi\hbar}. \tag{7.19}$$

把（7.18）式推广到多于一个自由度是轻而易举的

$$\langle q_1'',\cdots,q_n'';t''|q_1',\cdots,q_n';t'\rangle$$

$$=\int\prod_a(Dq_a)(Dp_a)\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\left[\sum_a p_a\dot{q}_a-H(p,q)\right]. \tag{7.20}$$

跃迁振幅的费曼公式是从（7.18）式出发，限定经典哈密顿量为以下特定形式

$$H(p,q)=\frac{p^2}{2m}+V(q) \tag{7.21}$$

而导出的。那时，可以明显地求出动量积分，结果得到

$$\int(Dp)\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\ (p\dot{q}-H)$$
$$=\left(\frac{m}{2\pi\hbar i\Delta t}\right)^{N/2}\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dtL(q,\dot{q}), \tag{7.22}$$

式中 $L(q,\dot{q})$ 是经典拉格朗日量

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q). \tag{7.23}$$

把（7.22）式代到(7.18)式中，得到

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle=\mathscr{N}\int(Dq)\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dtL(q,\dot{q}). \tag{7.24}$$

这就是费曼公式。其中，$\mathscr{N}$ 是一个归一化常数，通常在 $N\to\infty$ 极限时它是无穷大，不过物理结果与它无关。这是因为，在形式为 $\langle q'',t''|O|q',t'\rangle/\langle q'',t''|q',t'\rangle$ 的矩阵元中，它被消掉了。由于这个缘故，我们只要把(Dq)确定到差一个常数因子（可能是无穷大）即可。

在（7.21）的假设下，可以证明

$$\langle q'',t''|T[q_{op}(t_1)\cdots q_{op}(t_n)]|q',t'\rangle$$
$$=\mathscr{N}\int(Dq)[q(t_1)]\cdots q(t_n)]\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dtL(q,\dot{q}). \tag{7.25}$$

我们简要地给出 $n=2$，且 $t_1>t_2$ 情况下的证明如下

$$\langle q'',t''|q_{op}(t_1)q_{op}(t_2)|q',t'\rangle$$
$$=\int dq_1dq_2\ \langle q'',t''|q_{op}(t_1)|q_1,t_1\rangle\langle q_1,t_1|q_{op}(t_2)|q_2,t_2\rangle \langle q_2,t_2|q',t'\rangle$$
$$=\int dq_1dq_2q_1q_2\ \langle q'',t''|q_1,t_1\rangle\langle q_1,t_1|q_2,t_2\rangle\langle q_2,t_2|q',t'\rangle.$$

由这点出发，依照(7.8)式起始的那些步骤就可求得最后的结果。

事实上，费曼公式（7.24)和(7.25)在比(7.21)更普遍的条

件下也是适用的．对于一个普遍形式的经典拉格朗日量

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha A_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\beta+\sum_\alpha b_\alpha(q)\dot{q}_\alpha-V(q),\tag{7.26}$$

无论什么时候，只要矩阵$A(q)$不依赖于q（这里假设A是实的 非奇异矩阵），则它们总是成立的。为了证明这一点，首先定义正则动量

$$p_\alpha=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}=\sum_\beta A_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta+b_\alpha.\tag{7.27}$$

利用矩阵符号

$$p=A\dot{q}+b,\quad \dot{q}=A^{-1}(p-b)\tag{7.28}$$

可以把经典哈密顿量写成如下形式

$$H(p,q)=\frac{1}{2}(\tilde{p},A^{-1}\tilde{p})+V,\quad \tilde{p}=p-b.\tag{7.29}$$

从（7.18）式我们得到

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle=\mathscr{N}\int\prod_\alpha dq_\alpha dp_\alpha\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\left(\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right),$$

$$\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-H=\sum(\tilde{p}_\alpha+b_\alpha)\dot{q}_\alpha-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\tilde{p}_\alpha A^{-1}_{\alpha\beta}\tilde{p}_\beta-V$$

$$=-\frac{1}{2}(\tilde{p},A^{-1}\tilde{p})+(\tilde{p},\dot{q})+(b,\dot{q})-V.$$

$$\begin{aligned}\int(Dp)\exp\frac{i}{\hbar}\int dt(p\dot{q}-H)&=\prod_t\int(Dp)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Delta t)(p\dot{q}-H)\right]\\&=\prod_t\int(D\tilde{p})\exp\frac{i}{\hbar}(\Delta t)\,[-\frac{1}{2}(\tilde{p},A^{-1}\tilde{p})\\&\qquad+(\tilde{p},\dot{q})+(b,\dot{q})-V]\end{aligned}\tag{7.30}$$

$$=\text{常数}\cdot\prod_t\left\{\exp\frac{i}{\hbar}(\Delta t)\left[\frac{1}{2}(\dot{q},A\dot{q})+(b,\dot{q})-V\right]\right\}(\det A)^{-1/2}$$

$$=\text{常数}\cdot\left[\exp\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dtL(q,\dot{q})\right]\prod_t(\det A)^{-1/2}.$$

如果 $A(q)$不依赖于q，则最后一个因子是个常数，它可以吸收 到

总的归一化因子中。

如果（7.26）式中的矩阵 $A(q)$ 确实依赖于 q，则费曼公式需要修改。我们改写

$$\prod_t (\det A)^{-1/2} = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_t \ln(\det A)\right]. \tag{7.31}$$

在 $\Delta t \to 0$ 极限下

$$\sum_t \longrightarrow \delta(0)\int dt, \tag{7.32}$$

这是因为一个单位面积的矩形，底为 dt 则高为 $\delta(0)$。于是

$$\prod_t (\det A)^{-1/2} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \exp\left[-\frac{1}{2}\delta(0)\int_{t'}^{t''} dt \ln(\det A)\right]. \tag{7.33}$$

因此

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle$$

$$= \mathscr{N}\int (Dq) \exp \frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} dt \left[L(q, \dot{q}) - \frac{\hbar}{2i}\delta(0) \ln\det A(q)\right]. \tag{7.34}$$

在质量不为零的矢量玻色子理论[2]中我们会碰到一个例子，该例子表明，（7.34）式必须有带因子 $\delta(0)$ 的奇异项。

当（7.26）式中的矩阵 $A_{\alpha\beta}$ 是奇异矩阵时，费曼公式（7.24）式不适用。这就是当有一个坐标其时间微商在拉格朗日量中不出现时的情形。在这种情况下，必须回到（7.18）的哈密顿形式。

7.2 量子场论

把费曼公式推广到量子场论是很简单的，只要让坐标的个数变成不可数的无穷大即可。我们以一个玻色子场的情况为例，具体地说明这一推广。推广到多于一个玻色子场也是很简单的。费米子场的情形，以后将单独讨论。

在正则量子化中，坐标是薛定谔场算符 $\phi_{op}(x)$，其中的空间变量 x 起着该坐标的连续标号的作用。用 $|\phi\rangle$ 代表 $\phi_{op}(x)$ 的本征态

$$\phi_{op}(\boldsymbol{x})\ |\phi\rangle\ =\phi(\boldsymbol{x})|\ \phi\rangle \tag{7.35}$$

式中 $\phi(\boldsymbol{x})$ 是一个 c 数函数。跃迁振幅被定义为

$$\langle\phi_2,t_2|\ \phi_1,t_1\rangle\equiv\langle\phi_2|\ e^{-i(t_2-t_1)H_{op}/\hbar}\phi_1\rangle\ , \tag{7.36}$$

式中的 H_{op} 是该体系的与时间无关的哈密顿算符。设经典的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(x)\equiv\mathscr{L}(\phi(x),\partial^{\mu}\phi(x)). \tag{7.37}$$

假设它对 $\partial_{\mu}\phi(x)$ 是二次的，且系数不依赖于 $\phi(x)$。费曼公式写成

$$\langle\phi_2,t_2|\phi_1,t_1\rangle=\mathscr{N}\int_{\phi_1}^{\phi_2}(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\int_1^2 d^4x\mathscr{L}(x), \tag{7.38}$$

式中

$$\int_1^2 d^4x\equiv\int_{t_1}^{t_2}dx_0\int_{所有空间}d^3x, \tag{7.39}$$

且端点受到如下约束

$$\phi(\boldsymbol{x},t_2)=\phi_2(\boldsymbol{x}),\quad \phi(\boldsymbol{x},t_1)=\phi_1(\boldsymbol{x}). \tag{7.40}$$

泛函积分 $\int(D\phi)$ 可以这样来定义，即先把 x 看成是分立变量，然后在一个物理计算的最后结果中趋向连续的极限。另一种作法是，可以把体系放到一个很大的、但又是有限的时空体积内，对 ϕ 的每个分立的傅里叶分支独立地求积分，然后取体积为无穷大的极限。我们也有

$$\begin{aligned}&\langle\phi_2,t_2|T\phi_{op}(x_1)\cdots\phi_{op}(x_n)|\ \phi_1,t_1\rangle \\ &=\mathscr{N}\int_{\phi_1}^{\phi_2}(D\phi)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp\frac{i}{\hbar}\int_1^2 d^4x\mathscr{L}(x).\end{aligned} \tag{7.41}$$

它的证明与 (7.25) 式的证明类似。

这个跃迁振幅可以以某种方式解析延拓到复的时间。为了研究这种可能性，考虑 H_{op} 的本征态 $|n\rangle$，且假定存在唯一的一个有着零能量的真空态：

$$\begin{aligned}&H_{op}|n\rangle\ =E_n|\ n\rangle\ ,\ E_n\geqslant 0, \\ &H_{op}|\ 0\rangle\ =0,\qquad \langle 0|\ 0\rangle\ =1.\end{aligned} \tag{7.42}$$

于是，我们可以把跃迁振幅写成

$$\begin{aligned}\langle\phi_2,t_2|\phi_1,t_1\rangle &= \langle\phi_2\Big|\exp\Big[-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)H_{op}\Big]\Big|\phi_1\rangle \\ &=\sum_n\langle\phi_2|n\rangle\ \langle n|\phi_1\rangle\exp\Big[-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)E_n\Big] \\ &=\int_0^\infty dE\rho_{21}(E)\exp\Big[-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)E\Big],\end{aligned}\tag{7.43}$$

其中

$$\rho_{21}(E)=\sum_n\langle\phi_2|n\rangle\langle n|\phi_1\rangle\delta(E-E_n).\tag{7.44}$$

显然，可以把这个跃迁振幅延拓到 t_2-t_1 的下半平面，例如：

$$\langle\phi_2,-i\tau|\phi_1,0\rangle=\int_0^\infty dE\rho_{21}(E)e^{-\tau E/\hbar}\quad(\tau>0).\tag{7.45}$$

算出上式右边之后，再把 τ 解析延拓到正虚轴，则可以重新得到实时间的表达式。

取 $\tau\to\infty$ 极限，我们得到

$$\begin{aligned}\langle\phi_2,-i\tau|\phi_1,0\rangle &\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\langle\phi_2|0\rangle\langle 0|\phi_1\rangle \\ &=\Psi_0[\phi_2]\Psi_0^*[\phi_1],\end{aligned}\tag{7.46}$$

式中 $\Psi_0[\phi]\equiv\langle\phi|0\rangle$ 是体系的基态波函数。把 (7.46) 与 (7.38) 式结合在一起，我们得到

$$\Psi_0[\phi_2]\Psi_0^*[\phi_1]=\mathscr{N}\int_{\phi_1}^{\phi_2}(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int d^3x\mathscr{L}(\boldsymbol{x},-i\tau),\tag{7.47}$$

其端点的约束条件为

$$\phi(\boldsymbol{x},t=i\infty)=\phi_2(\boldsymbol{x}),\quad\phi(\boldsymbol{x},t=-i\infty)=\phi_1(\boldsymbol{x})\tag{7.48}$$

当有些场其共轭动量恒为零时，费曼公式 (7.38) 就不能照现在这种样子来应用了。规范场就属于这种情况，第八章将单独讨论它。此刻我们指出一点就可以了，即只要 $\mathscr{L}(x)$ 再补充上一个“规范固定”项 (gauge fixing term)，费曼公式仍然成立。本章其余部

分所讨论的一般方法仍然适用。

7.3 外　　源

在经典拉格朗日密度中加上一项$\phi(x)J(x)$，就可以使该体系与一个外源（external sources）相耦合，其中$J(x)$是一个任意的函数。我们将看到，这是一种有用的数学方法。

有外源存在时，跃迁振幅由下式表示

$$\langle\phi_2,t_2|\phi_1,t_1\rangle=\mathscr{N}\int_{\phi_1}^{\phi_2}(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\int_1^2 d^4x[\mathscr{L}(x)+\phi(x)J(x)] \tag{7.49}$$

由上式对外源求泛函微商，可以得到场的编时乘积（time-ordered product)的矩阵元

$$\frac{\delta\langle\phi_2,t_2|\phi_1,t_1\rangle}{\delta J(y_1)\cdots\delta J(y_n)}$$
$$=\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\mathscr{N}\int_{\phi_1}^{\phi_2}(D\phi)\phi(y_1)\cdots\phi(y_n)\exp\frac{i}{\hbar} \tag{7.50}$$
$$\cdot\int_1^2 d^4x[\mathscr{L}(x)+\phi(x)J(x)].$$

若取$J(x)=0$，则上式的右边就简化为(7.41)式的右边。

假定拉格朗日密度可以分离成一个未微扰项（unperturbed term）加上一个微扰项(perturbation term)

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}_0(x)+\mathscr{L}'(\phi(x)). \tag{7.51}$$

注意，$\mathscr{L}'$被看做是$\phi(x)$的函数，虽然它可能包含有$\phi(x)$的微商。我们可以把跃迁振幅写成

$$\langle\phi_2,t_2|\phi_1,t_1\rangle=\left\{\exp\frac{i}{\hbar}\int_1^2 d^4x\mathscr{L}'\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\}$$

$$\mathscr{N}\int_{\phi_1}^{\phi_2}(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\int_1^2 d^4x[\mathscr{L}_0(x)+\phi(x)J(x)]. \tag{7.52}$$

把第一个指数因子展开成$\mathscr{L}'$的幂级数，可以求得一个微扰级数。

在 7.7 节我们将以推导 ϕ^4理论的费曼规则为例来具体说明这种技巧。

路径积分方法的一个重要应用，是计算有外源存在时真空-真空振幅。知道了这个振幅就确定了该体系的全部动力学。换句话说，全部动力学知识都可以从真空态对一个任意外源的响应（response）推导出来。

我们先来定义真空-真空振幅，然后揭示它与体系的格林函数的关系。有外源存在时，体系的哈密顿量由 H_{op} 变成

$$H_{op}^{J} = H_{op} - H_{op}'$$

$$H_{op}' = \int d^3x J(x) \phi_{op}(x), \tag{7.53}$$

式中 $\phi_{op}(x)$ 是海森堡算符，$J(x)$ 是一个 c 数函数，除了要求 $J(x)$ 在无穷远的过去及无穷远的未来为零这个条件，即

$$J(x) \xrightarrow[|x_0|\to\infty]{} 0 \tag{7.54}$$

之外，$J(x)$ 是任意的函数。这个条件保证了该体系在无穷远的过去及无穷远的未来能处在哈密顿量 H_{op} 的真空态 $|0\rangle$。真空态的响应由下述振幅描述

$\langle 0^+ | 0^- \rangle_J \equiv$ 当已知 $x_0 = -\infty$ 体系处在 $|0\rangle$ 态时，$x_0 = \infty$ 体系将处在 $|0\rangle$ 态的几率振幅。 (7.55)

根据么正性知，这个振幅只能是个相因子

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle_J \equiv \exp \frac{i}{\hbar} W[J]. \tag{7.56}$$

现在，变到关于 H_{op}的相互作用绘景（interaction picture）。在 $x_0 = 0$时，体系的状态由

$$|0^-\rangle_J = T\left[\exp \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{0} dt H'_{op}(t)\right] |0\rangle \tag{7.57}$$

给出，式中 $H'_{op}(t)$ 的时间演化由 H_{op} 定。这就是说，$H'_{op}(t)$ 是没有外源时体系的海森堡算符。另一方面，$|0^+\rangle_J$ 表示该体系在

$x_0=0$时的一个这样的态，它在$x_0=\infty$时将演化为$|0\rangle$，它由

$$|0^+\rangle_J=T\left[\exp\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{0}dtH'_{op}(t)\right]|0\rangle \tag{7.58}$$

给出。因此

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J=\langle 0|T\left[\exp\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}dtH'_{op}(t)\right]|0\rangle$$

$$=\langle 0|T\left[\exp\frac{i}{\hbar}\int d^4xJ(x)\phi_{op}(x)\right]|0\rangle. \tag{7.59}$$

我们立刻看到

$$\left[\frac{\delta\langle 0^+|0^-\rangle}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\right]_{J=0}=\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\mathscr{G}_n(x_1,\cdots,x_n), \tag{7.60}$$

式中

$$\mathscr{G}_n(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|T\phi_{op}(x_1)\cdots\phi_{op}(x_n)|0\rangle \quad (n\geqslant 1) \tag{7.61}$$

是在没有外源时完全描述该体系动力学的格林函数 (Green's function)。从 (7.60) 式我们得到展开式

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\mathscr{G}_n(x_1,\cdots,x_n)$$

$$\cdot J(x_1)\cdots J(x_n) \tag{7.62}$$

式中$\mathscr{G}_0=1$。这表明 $\langle 0|0\rangle_J$是格林函数的生成泛函 (generating functional)。

(7.56) 式中定义的相位$W[J]$是连通格林函数 (Connected Green's function) 的生成泛函：

$$\frac{i}{\hbar}W[J]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n$$

$$\cdot G_n(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n), \tag{7.63}$$

式中$G_n(x_1,\cdots,x_n)$，$(n\geqslant 1)$，是n点连通格林函数，即有着n条终止在$x_1,\cdots,x_n$点的外线的所有连通费曼图的总和。为了证明这一点，我们注意到$\mathscr{G}_n(n\geqslant 1)$是连通格林函数$G_m(m\geqslant 1)$的一些乘积之和，它可以如下表示。设$\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}$是整数$n$的一个

配分：

$$n=\sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3+\cdots, \tag{7.64}$$

我们可以写成

$$\mathscr{G}_n(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\substack{\{\sigma_l\}\\ \Sigma l\sigma_l=n}}\sum_P P\underbrace{[G_1(\cdot)\cdots G_1(\cdot)]}_{\sigma_1\text{个因子}}$$

$$\underbrace{[G_2(\cdot\cdot)\cdots G_2(\cdot\cdot)]}_{\sigma_2\text{个因子}}\cdots, \tag{7.65}$$

上式中的那些括号里总共有 n 个圆点，它们以某种方式安放在与 $x_1,\cdots,x_n$ 一一对应的位置上。符号P代表 $x_1,\cdots,x_n$ 的一种不同的排列（Permutation）。这样的排列的总数是

$$\frac{n!}{(\sigma_1!\sigma_2!\cdots)[(1!)^{\sigma_1}(2!)^{\sigma_2}\cdots]}. \tag{7.66}$$

当把（7.65）式代入到(7.62)式中时，通过对于 $x_1,\cdots,x_n$ 的积分，求和 $\sum_P$ 中的每一项贡献都相同。因此

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{\{\sigma_l\}\\ \Sigma l\sigma_l=n}}\left(\frac{i}{\hbar}\right)\frac{[\int d^4xG_1(x)J(x)]^{\sigma_1}}{\sigma_1!}$$

$$\frac{[\int d^4xd^4yG_2(x,y)J(x)J(y)]^{\sigma_2}}{\sigma_2!(2!)^{\sigma_2}}\cdots \tag{7.67}$$

上式中的双重求和与对每一个整数 σ_l 独立地求和是相同的。因此，

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J=\sum_{\sigma_1=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1!}\left[\frac{i}{\hbar}\int d^4xG_1(x)J(x)\right]^{\sigma_1}$$

$$\cdot\sum_{\sigma_2=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma_2!}\left[\left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\frac{1}{2!}\int d^4xd^4yG_2(x,y)J(x)J(y)\right]^{\sigma_2}\cdots$$

$$=\exp\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_nG_n(x_1,\cdots,x_n)J(x_1)\cdots J(x_n). \tag{7.68}$$

我们现在来证明，真空-真空振幅可以表示为路径积分。为简便起见，让我们仅在很长的但有限的时间间隔内加入（turn on）外源：

$$J(x)=0 \quad 对于\ |x_0|>T, \quad (T\to\infty 情形) \tag{7.69}$$

考虑从加入外源之前的时刻 t_1 到除去（turn off）外源之后的一个时刻 t_2 的跃迁振幅

$$\begin{aligned}&\langle\phi_2, t_2|\phi_1, t_1\rangle\\ =&\int(D\phi)(D\phi')\langle\phi_2, t_2|\phi, T\rangle\langle\phi, T|\phi', -T\rangle_J\langle\phi', -T|\phi_1, t_1\rangle\\ &\qquad (t_1<-T, t_2<T).\end{aligned} \tag{7.70}$$

我们立即可以算出无源振幅。例如

$$\begin{aligned}\langle\phi_2, t_2|\phi, T\rangle &= \langle\phi_2|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t_2-T)H_{op}\right]|\phi\rangle\\ &=\sum_n\langle\phi_2|n\rangle\langle n|\phi\rangle\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(t_2-T)E_n\right]\\ &\xrightarrow[\substack{t_2\to -i\infty\\ T\to i\infty}]{}\langle\phi_2|0\rangle\langle 0|\phi\rangle.\end{aligned} \tag{7.71}$$

于是，若把时间延拓为

$$t_1\to -i\infty,\ t_2\to i\infty,\ T\to i\infty \tag{7.72}$$

我们就得到

$$\begin{aligned}\frac{\langle\phi_2, t_2|\phi_1, t_1\rangle_J}{\langle\phi_2|0\rangle\ \langle 0|\phi_1\rangle}&\to\int(D\phi)(D\phi')\langle\phi_2, T|\phi_1, -T\rangle_J\\ &=\langle 0|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}TH'_{op}\right)|0\rangle=\langle 0^+|0^-\rangle_J,\end{aligned} \tag{7.73}$$

或

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J=\lim_{\substack{t_2\to -i\infty\\ t_1\to i\infty}}\frac{\langle\phi_2, t_2|\phi_1, t_1\rangle_J}{\langle\phi_2|0\rangle\ \langle 0|\phi_1\rangle}. \tag{7.74}$$

利用（7.49）式，我们可以把右边表示成对于四维欧氏空间中定义的场的一个路径积分。注意，端点的约束没有什么关系，因为（7.74）式的右边不依赖于 $\phi_2(x)$ 和 $\phi_1(x)$。

7.4 四维欧氏空间

如图7.1所示，在复 x_0 平面上把实轴顺时针转成负虚轴，就可以从闵氏空间得到四维欧氏空间，四维欧氏空间中的一点用 x_E 代表，它与闵氏空间中的相应的点 $x=(x_0, \boldsymbol{x})$ 的关系为

$$x_E=(\boldsymbol{x}, x_4),$$

$$x_4=ix_0\ (实), \tag{7.75}$$

$$d^4x=-id^4x_E,$$

$$x^2{}_E=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-x^2.$$

相应的欧氏动量空间是这样定义的，即使得 $k_4x_4=k^0x^0$。选取这一约定的结果，使得在一个平面波的传播中，x_4的正方向对应于x^0的正方向。相应地，如图7.1所示，我们把 k^0 轴逆时针转到了正虚轴。我们有

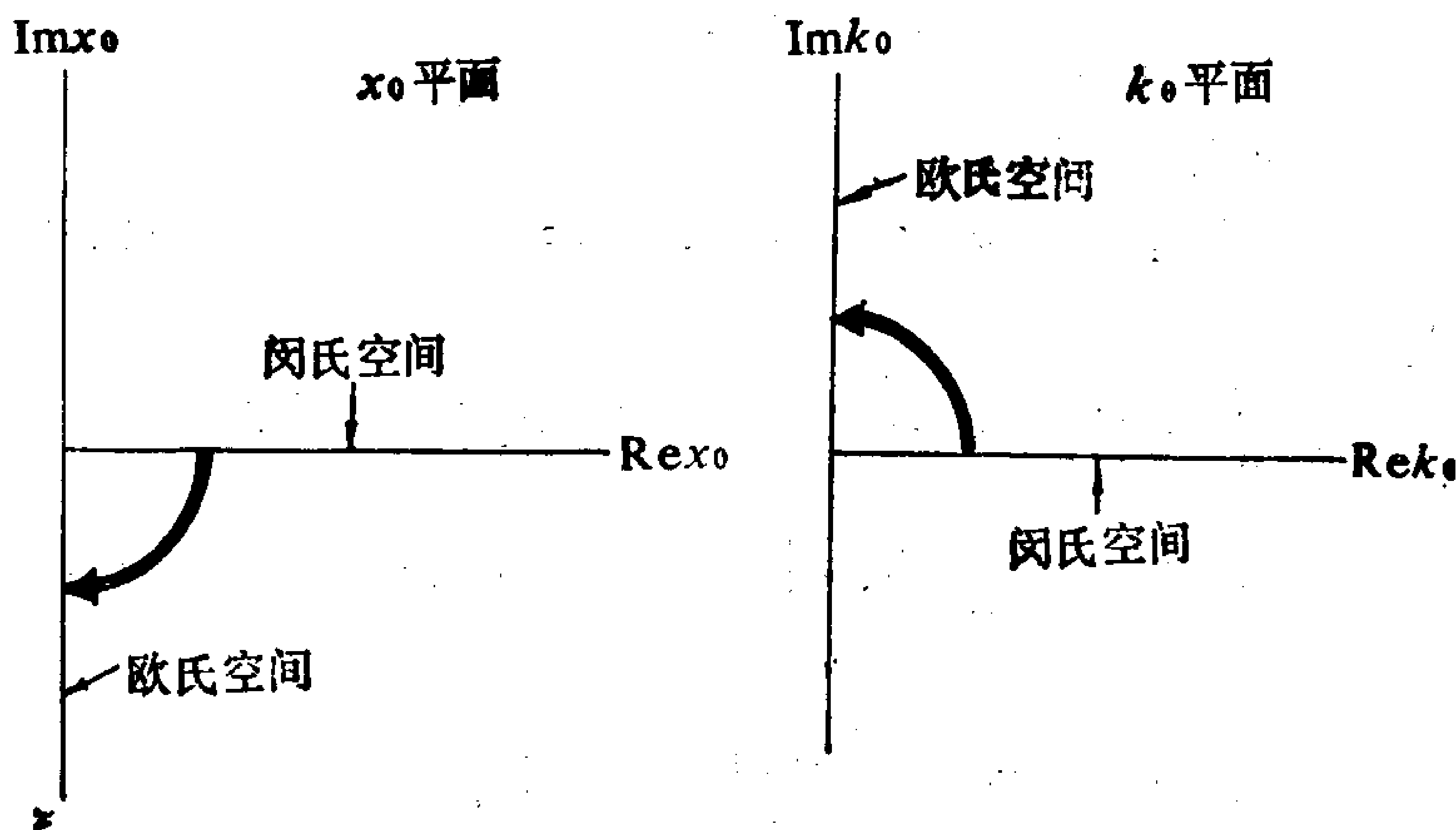


图7.1 怎样把闵氏空间延拓成欧氏空间

$$k_E=(\boldsymbol{k}, k_4)$$

$$k_4=-ik_0(实), \tag{7.76}$$

$$d^4k = id^4k_E,$$

$$k_E^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = -k^2.$$

注意，$k\cdot x = k^0x^0 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ 变换成 $k_4x_4 - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$，但是在取 $f(k^2)$ 的傅氏变换时，我们可以用 $k_Ex_E = k_4x_4 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$代替 $k\cdot x$。

延拓到欧氏空间意味着我们在虚时间内考虑体系的动力学演化。这就是说，原则上我们必须求解一个这样的运动方程，它的时间 x^0 用 $-ix_4$ 代替，其中 x_4 是一个实参数。拉格朗日密度的洛仑兹不变性被欧氏空间O_4转动不变性所代替。运动方程将确定如何把场延拓到欧氏空间。

在闵氏空间中定义的一个实标量场$\phi(x)$，由一个O_4不变的实标量场$\phi(x_E)$所代替。

一个具有实分量的有质量矢量场$A^\mu(x)$被一个具有实分量的欧氏空间矢量场$A^\mu(x_E)$ 所代替，遵循的规则为：

$$A^k(x) \to A^k(x_E) \qquad (k=1,\ 2,\ 3),$$

$$A^0(x) \to iA_4(x_E). \tag{7.77}$$

要注意，A^0 延拓到A_4时，符号与x^0 延拓时相反，这是由于它应当象$\frac{\partial}{\partial x^0}$那样变换. 辅助条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ 由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = 0$$

来代替. 对于欧氏空间的矢量，上、下指标间没有什么区别.

对于一个规范场，答案取决于我们打算如何处理与规范不变性相联系的非物理自由度。它们没有任何物理意义，协变性的论证又不能令人信服. 在协变规范 (covariant gauge) 中，(7.77)式是适用的。在非协变规范中，我们仍可利用 (7.77) 式作为一种形式的做法，尽管它并不是必须的。

真空-真空振幅的泛函积分在欧氏形式中如下式所示

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J \equiv \exp\frac{i}{\hbar}W[J]$$

$$= \mathscr{N}\int (D\phi)\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\{S_E[\phi]-(\mathrm{J},\phi)_E\}\right), \tag{7.78}$$

其中

$$S_E[\phi]=\int d^4x_E \mathscr{L}(x_E) = -iS[\phi],$$

$$(\mathrm{J},\phi)_E=\int d^4x_E J(x_E)\phi(x_E). \tag{7.79}$$

在这种形式中，这个泛函积分形式上就是四维空间的一个经典体系温度为 $\hbar$ 时的配分函数。

当我们想要研究哪些路径对跃迁振幅有重要贡献时，欧氏表述形式是非常实用的。闵氏空间的路径积分给予每条路径一个相因子，经典路径是具有稳定相位的那条路径。而欧氏形式赋予每条路径一个类玻耳兹曼 (Boltzmann-like) 因子，经典路径相应于欧氏作用量取最小值的路径。邻近路径的贡献逐渐衰减而不是越来越剧烈地振荡。

在真空-真空振幅的费曼图展开中，欧氏手续只不过在传播子(propagator) 中提供了一个修正项 $i\varepsilon$（见(7.99)式和(7.100)式）。

7.5 路径积分的计算

把通常的高斯积分公式推广就可以用来计算高斯型的路径积分。假设 $Q(x)$ 是变量 x 的二次型：

$$Q(x)=\frac{1}{2}ax^2-b\,x=-\frac{b^2}{2a}+\frac{1}{2}a(x-x_0)^2, \tag{7.80}$$

其中

$$x_0=b/a. \tag{7.81}$$

如所周知

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-Q(x)}=\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{b^2}{2a}\right) \tag{7.82}$$

这个结果可以立即推广到包含n个变量$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$的一个二次型$Q(u)$：

$$Q(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (b, u), \tag{7.83}$$

其中b是一个n维常矢量，A是一个对称的、非奇异的$n \times n$矩阵，而

$$(b, u) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i u_i. \tag{7.84}$$

我们还可以把$Q(u)$写成

$$Q(u) = -\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) + \frac{1}{2}[(u - u_0), A(u - u_0)], \tag{7.85}$$

$$u_0 = A^{-1}b \ .$$

于是，

$$\int (Du) e^{-Q(u)} = (\det A)^{-1/2} \exp \frac{1}{2}(b, A^{-1}b),$$

$$(Du) \equiv (2\pi)^{-n/2} du_1 \cdots du_n, \tag{7.86}$$

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_i \ .$$

对于一个实场$\phi(x)$，定义一个二次型$Q[\phi]$为

$$Q[\phi] = \frac{1}{2}(\phi, A\phi) - (b, \phi), \tag{7.87}$$

其中A是非奇异 (non-singular) 的和自伴 (self-adjoint) 的，而

$$(\phi_1, \phi_2) = \int d^4 x_E \phi_1(x_E) \phi_2(x_E). \tag{7.88}$$

我们可以把$Q[\phi]$改写成

$$Q[\phi] = -\frac{1}{2}(b, A^{-1}b) + \frac{1}{2}[(\phi - \phi_0), A(\phi - \phi_0)], \tag{7.89}$$

$$\phi_0 = A^{-1}b.$$

于是，

$$\int (D\phi) e^{-Q[\phi]} = \mathcal{N} (\det A)^{-1/2} \exp \frac{1}{2}(b, A^{-1}b). \tag{7.90}$$

体积元 $(D\phi)$ 可以定义为$\Pi_x d\phi(x)$，至多差一个常数因子。这本未定的常数（可能是无穷大）被吸收到归一的常数$\mathcal{N}$中。

7.6 费曼传播子

为了用一个例子来说明费曼传播子就是拉格朗日密度中动能算符的逆，我们来计算一个自由标量场的生成泛函$W[J]$。

拉氏密度为

$$\mathscr{L}_0(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x). \tag{7.91}$$

经典的作用量为

$$\begin{aligned} S_0[\phi] &= -\frac{1}{2}\int d^4x\phi(x)\,(\Box^2 + m^2)\,\phi(x) \\ &= \frac{i}{2}\int d^4x_E\phi(x_E)\,(-\Box_E^2 + m^2)\,\phi(x_E). \end{aligned} \tag{7.92}$$

动能算符是 $(-\Box_E^2 + m^2)$ 。利用(7.78)式，我们有

$$\begin{aligned} \exp\frac{i}{\hbar}W_0[J] &= \mathcal{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\left\{S_0[\phi] - i\int d^4x_E\phi(x_E)J(x_E)\right\} \\ &= \mathcal{N}\int(D\phi)e^{-Q[\phi,J]}, \end{aligned} \tag{7.93}$$

式中

$$Q[\phi, J] = \frac{1}{2}(\phi, A\phi) - (b, \phi), \tag{7.94}$$

而

$$A = \frac{1}{\hbar}(-\Box_E^2 + m^2), \quad b = \frac{1}{\hbar}J(x_E) \tag{7.95}$$

于是，根据 (7.90)式，得到

$$\exp\frac{i}{\hbar}W_0[J] = \mathcal{N}(\det A)^{-1/2}\exp\frac{1}{2}(b, A^{-1}b), \tag{7.96}$$

或

$$\frac{i}{\hbar}W_0[J]=\frac{1}{2\hbar}(J,(-\Box_E^2+m^2)^{-1}J)+\ln[\mathscr{N}(\det A)^{-1/2}] \quad (7.97)$$

最好在动量空间来研究算符 $(-\Box_E^2+m^2)^{-1}$：

$$\begin{aligned}(-\Box_E^2+m^2)^{-1}f(x_E)&=(-\Box_E^2+m^2)^{-1}\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{-ik_Ex_E}\tilde{f}(k_E)\\&=\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_Ex_E}}{k_E^2+m^2}f(k_E)\\&=i\int d^4y_E\Delta_F(x_E-y_E)\tilde{f}(y_E),\end{aligned} \quad (7.98)$$

其中Δ_F 是费曼传播子，其定义为

$$\Delta_F(x_E)\equiv-i\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_Ex_E}}{k_E^2+m^2}. \quad (7.99)$$

当把 x_E 转到闵氏空间时，上式取熟知的形式

$$\Delta_F(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2-m^2+i\varepsilon} \quad (\varepsilon\to0^+) . \quad (7.100)$$

我们看到，欧氏表述形式就相当于以通常方式规定 k_0 的积分回路。

$(-\Box_E^2+m^2)$ 的本征值是 $(k_E^2+m^2)$. 因此

$$\det A=\prod_{k_E}\hbar^{-1}(k_E^2+m^2), \quad (7.101)$$

它是一个发散的量。然而，由于它不依赖于 $J(x)$，所以在 (7.97) 式中通过适当地选取N 而把它消掉。从而我们求得

$$\begin{aligned}W_0[J]&=\frac{1}{2}\int d^4x_E\,d^4y_E\,J(x_E)\Delta_F(x_E-y_E)J(y_E)\\&=-\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\,J(x)\Delta_F(x-y)J(y) .\end{aligned} \quad (7.102)$$

与 (7.63) 式比较表明，对于自由场理论，唯一非零的连通格林函数是费曼传播子：

$$G_2(x,y)=i\hbar\Delta_F(x-y) . \quad (7.103)$$

7.7 费 曼 图

我们以 ϕ^4 理论为例来说明费曼图。存在外源时拉格朗日密度为：

$$\mathscr{L}(x)=\mathscr{L}_0(x)+\mathscr{L}'(\phi(x))+\phi(x)J(x), \quad (7.104)$$

其中

$$\mathscr{L}_0(x)=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x)-\frac{1}{2}m^2\phi^2(x),$$

$$\mathscr{L}'(\phi(x))=\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x). \quad (7.105)$$

利用（7.74）式和（7.52）式，我们可以写出

$$\exp\frac{i}{\hbar}W[J]=\left\{\exp\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathscr{L}'\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\}$$

$$\cdot\exp\frac{i}{\hbar}W_0[J], \quad (7.106)$$

式中 $W_0[J]$ 由（7.102）式给出。把上式展开成 $\mathscr{L}'$ 的幂级数，即可求得格林函数通常的费曼图展开。

无需利用 $\mathscr{L}'$ 的具体形式就能看到，只要保留“树图”即可得到经典极限（经典极限形式上定义为该理论在 $\hbar\to 0$ 时的极限）。考虑任何一个连通的费曼图，设

$$\begin{aligned}V&=\text{顶点的数目},\\ I&=\text{内线的数目},\\ E&=\text{外线的数目},\end{aligned} \quad (7.107)$$

每条内线带有一个内部 4 维动量，它是要被积分的。每个顶点加进一个 4 维动量守恒条件。还有一个所有外线的总 4 维动量守恒条件。这样，独立的内部 4 维动量的数目是

$$l=I-V+1, \quad (7.108)$$

它就是一个图中圈的数目。该图正比于 $\hbar$ 的某个幂次，它们来自

于内线和顶点。来自外线的 $\hbar$ 的幂次都不用考虑，因为这些外线在 S 矩阵元中都要用波函数来代替。

按照（7.16）式，一个顶点（与 $\mathscr{L}'$ 相联系的）贡献一个 $\hbar^{-1}$ 因子。每条内线相应于一个 $\hbar\Delta_F$ 因子，它来自于 $W_0[J]$ 中的量 $\hbar^{-1}(J,\ \Delta_F J)$ 通过微商 $\delta/\delta(J/\hbar)$ 而消去了两个 $(J/\hbar)$ 因子。所以，一个截腿连通图（amputated connected graph）对 $(i/\hbar)W[J]$ 的贡献正比于 $\hbar^{I-V}$，而对 $W[J]$ 的贡献正比于

$$\hbar^{I-V+1}=\hbar^{l}. \tag{7.109}$$

由于 $W[J]$ 是连通格林函数的生成泛函，所以一个截腿连通格林函数的 l 圈图正比于 $\hbar^l$. 树图是 $l=0$ 的图，因此是经典极限下唯一能存留下来的图。量子修正可以用 $\hbar$ 的幂次来分类，因此可以用圈的数目来分类。

现在，我们来推导费曼规则，它依赖于 $\mathscr{L}'$ 的显式。可以把（7.106）式更明显地写成

$$\exp\frac{i}{\hbar}W[J]=\left\{\exp\int d^4x\frac{i\lambda\hbar^3}{4!}\left[\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]^4\right\}\cdot\left\{\exp\int d^4x\,d^4y\,J(x)\frac{\Delta_F(x-y)}{2i\hbar}J(y)\right\}. \tag{7.110}$$

要注意

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(z)}=\delta^4(x-z),$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta J(z)}\right]^4\prod_{i=1}^{4}J(x_i)=4!\prod_{i=1}^{4}\delta^4(z-x_i)\ . \tag{7.111}$$

为了计算出（7.110）式，最方便的做法是把它用下列一些图形速记符号改写：

线：$x-y\equiv\Delta_F(x-y)/i\hbar$

线头：$\underset{x}{\bigcirc}\equiv J(x)$

接头：$\underset{z}{(\mathbf{X})} \equiv (\lambda \hbar^3/4!)([\delta/\delta J(z)]^4$

顶点：$\bullet \equiv$ ${}^1_3\!\times\!{}^2_4$ $= i\lambda\hbar^3 \prod_{i=1}^{4} \delta^4(z-x_i)$

我们举一个例子，如

$$\underset{x}{\bigcirc}\!-\!\underset{y}{\bigcirc} \equiv J(x)\frac{\Delta_F(x-y)}{i\hbar}J(y). \qquad (7.113)$$

用这种符号，我们有：

$$\exp\frac{i}{\hbar}W[J] = \left\{\exp\int d^4z\,\underset{z}{(\mathbf{X})}\right\}\cdot\left\{\exp\int d^4x\,d^4y\,\frac{1}{2}(\underset{x}{\bigcirc}\!-\!\underset{y}{\bigcirc})\right\}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\int(dx)(dy)(dz)[\underset{z_1}{(\mathbf{X})}\cdots\underset{z_m}{(\mathbf{X})}]\Big[\frac{1}{2}(\underset{x_1}{\bigcirc}\!-\!\underset{y_1}{\bigcirc})\cdots$$

$$\frac{1}{2}(\underset{x_n}{\bigcirc}\!-\!\underset{y_n}{\bigcirc})\Big], \qquad (7.114)$$

其中$\int(dx)(dy)(dz)$ 表示对于被积函数中的所有的x、y和z的积分。上述求和中一个不为零的项具有下列性质：

1. 一个接头必须找到四个线头，把它们连接在一起形成一个顶点。

2. 一个线头不一定与一个接头相连（如果它没有连接到接头上，那么它就是一条外线的自由端，并相应于一个因子$J(x)$）。

3. 如果一条线的两个线头连接到同一个接头上，其结果得到一个无穷大常数，可以被质量重整化所吸收。于是我们可以略去这种连接。

按照上述可知，每个接头必须找到四条不同的线，把它们连接起来，形成一个顶点。费曼图就是一个表示出与（7.114）式中一个非零项相应的线和接头连接情况的图。属于接头和线头的那些坐标都是要积分的，所以（7.114）式中两个不同的项可能

会有相同的连通性，因此共用一个费曼图。于是，(7.114) 是费曼图的一个加权求和，而 $(i/\hbar)W[J]$是连通费曼图的加权求和。

一个接头可以挑选一条线的一头也可挑选另一头，结果得到 (7.114) 中两个不同的项，它们的数值相等。因此，倘若为了画出费曼图而不去区分一条线的两个线头，则$\frac{1}{2}$(○—○)中的$\frac{1}{2}$因子就可以省略。考虑到这一规则，我们就可以用符号写出

$$\exp\frac{i}{\hbar}W[J]=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}\int[(\underset{1}{X})\cdots(\underset{m}{X})]$$
$$\cdot[(\bigcirc\underset{1}{—}\bigcirc)\cdots(\bigcirc\underset{n}{—}\bigcirc)]. \qquad (7.115)$$

当然，把一条线的一头连接到一个接头上不再看成是不同于把另一头连接到该接头上了。积分是在所有的顶点均已作成之后，对遍及全部顶点以及外线的自由线头的坐标进行计算的。

从现在起，我们只考虑连通图。设 N 是 (7.115) 式中与一个有 m 个顶点、n 条线（内线或外线），且有着相同连接方式的费曼图相对应的项的数目。它的权重为 $N/(m!n!)$（按照我们的约定，(7.115) 式中的因子 $1/(m!n!)$ 没有包括在一个图的定义中）。我们定义一个连通图的对称数[3] (symmetry number) s 为

$$\frac{1}{s}\equiv\frac{N}{m!n!}. \qquad (7.116)$$

于是

$$\frac{i}{\hbar}W[J]=\sum_{G}\frac{G}{s}, \qquad (7.117)$$

其中的求和要遍及所有的连通图 G。

考虑一个连通的非真空图（即至少有两条外线的图），它有 m 个顶点和 n 条线（外线或内线）。m 个顶点的每一种排列都相应于 (7.115) 式中不同的一项，因为一个顶点只能通过它在

图	对称数
	1
	2
	2
	6
	48
	8

图 7.2 ϕ^4理论中费曼图的对称数的一些例子

沿着某一条由一个外线头到另一个外线头的线上所在的位置来识别。重新把沿着这条线的点编号，则改变了（7.115）式中形成这些顶点的接头的安排 因此给出新的一项。所以，N包含一个因子$m!$。交换两条线相应于（7.115)式中不同的项，除非这两条线都是内线，而且它们的两个线头均共有相同的顶点。这样的内线称为"等价的"线。因此，线的不同排列数是$n!/(k_1!k_2!\cdots)$，其中k_1，$k_2\cdots$是各等价集合中内线的数目。于是$N=n!m!/(k_1!k_2!\cdots)$，而一个连通的非真空图的对称数是

$$s=\prod_i(k_i!)\ . \qquad (7.118)$$

一个真空图的对称数不遵从任何简单的普遍规则，对每一个别情况都必须单独计算[注c]。图7.2给出了对称数的一些例子。

[注c] 例如，考虑这样一项

$$\frac{1}{2!}[(\mathrm{X})_1(\mathrm{X})_2]\frac{1}{4!}[(\mathrm{O}\underset{1}{-}\mathrm{O})\cdots(\mathrm{O}\underset{4}{-}\mathrm{O})]$$

只有一种把线连接起来的方法，产生一个真空图，即图7.2中的第五图。因此，对称数是$2!4!=48$。

7.8 玻色子圈图和费米子圈图

考虑一个自由的复标量场，它与产生粒子-反粒子对的外源 $\Omega(x)$ 相耦合

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) &= \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi + \phi^*\phi\Omega \\ &= \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + (\Omega - m^2)\phi_1^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + (\Omega - m^2)\phi_2^2],\end{aligned} \tag{7.119}$$

式中

$$\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}, \quad \phi^* = (\phi_1 - i\phi_2)/\sqrt{2}. \tag{7.120}$$

该理论的任何一个连通费曼图都是一个单圈图，圈上有任何数目的顶点。

我们可以用固定格式如下计算出生成泛函 $W[J]$：经典作用量为

$$S[\phi_1, \phi_2, \Omega] = -i\int d^4x_E\mathscr{L}(x_E) = i\hbar[(\phi_1, A\phi_1) + (\phi_2, A\phi_2)], \tag{7.121}$$

其中

$$A = \hbar^{-1}(-\Box_E^2 + m^2 - \Omega)\,. \tag{7.122}$$

因此

$$\begin{aligned}\exp\frac{i}{\hbar}W[\Omega] &= \mathscr{N}\int(D\phi_1)(D\phi_2)\exp\frac{i}{\hbar}S[\phi_1, \phi_2, \Omega] \\ &= \mathscr{N}\left[\int(D\phi_1)e^{-(\phi_1, A\phi_1)}\right]^2 = \mathscr{N}\det A^{-1}.\end{aligned} \tag{7.123}$$

把上式展成 Ω 的幂级数即可得到费曼图展开。为此，引入下列一些符号

$$i\Delta_F = (-\Box_E^2 + m^2)^{-1},$$
$$\langle x|\Delta_F|y\rangle = \Delta_F(x-y), \tag{7.124}$$
$$\langle x|\,\Omega\,|y\rangle = \delta^4(x-y)\Omega(x),$$
$$\mathrm{Tr}\ f = \int d^4x_E \langle x_E|\ f\ |x_E\rangle.$$

于是可以写成

$$A = \hbar^{-1}[(i\Delta_F)^{-1} - \Omega], \tag{7.125}$$
$$\det A = \det(i\,\hbar\Delta_F)^{-1}\cdot\det(1 - i\Delta_F\Omega).$$

取 $\mathscr{N} = \det(i\,\hbar\Delta_F)$，则有

$$\frac{i}{\hbar}W[\Omega] = -\ln\det(1 - i\Delta_F\Omega) = -\mathrm{Tr}\ln(1 - i\Delta_F\Omega). \tag{7.126}$$

把它按 Ω 的幂次展开，得到

$$\frac{i}{\hbar}W[\Omega] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(i\Delta_F\Omega)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int d^4y_1\cdots d^4y_n[i\Delta_F(y_1-y_2)i\Delta_F(y_2-y_3)\cdots$$
$$i\Delta_F(y_n-y_1)]\cdot\Omega(y_1)\cdots\Omega(y_n), \tag{7.127}$$

式中所有的 y 都是欧氏坐标。这表明只有一个 n 级连通图，它由一个封闭圈组成，其上有 n 个顶点，而对称数为 n。

如果场 $\phi(x)$ 遵从费米统计而不是玻色统计，则每个圈还带有一个额外的 -1 因子，但其它的费曼规则并不改变。因为在这个例子中，所有的连通图都是单圈的，所以它们只是改变符号，$W[\Omega]$ 亦然。要想重新导出费曼规则，就必须以这样的方式重新定义路径积分的意义，使得（7.123）式变成它的逆，即

$$\int(D\phi_1)(D\phi_2)\exp\frac{i}{\hbar}S[\phi_1;\ \phi_2,\ \Omega] = \det A. \tag{7.128}$$

在这个特例中，应用费米统计当然是没有物理意义的（它使 ϕ 成为一个“鬼场”（ghost field）．而在规范场的量子化中，“鬼

场”只是作为一种形式上的手段）．这个例子的要点，在于启发人们找到一种方法，能用路径积分处理物理的费米子场论，下一节我们就要讨论它。

7.9 费米子场

在正则量子化中，费米子场 $\psi_j(x)$ 和 $\psi_k^{\dagger}(x)$ 是由反对易关系

$$\{\psi_j(x), \psi_k^{\dagger}(y)\}_{x_0=y_0} = \hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{jk},$$

$$\{\psi_j(x), \psi_k(y)\}_{x_0=y_0} = 0 \qquad (7.129)$$

定义的。这暗示着在形式上的经典极限 $\hbar\to 0$ 时，$\psi_j(x)$ 和 $\psi_k^{\dagger}(x)$ 不是用普通的数来表示的，而是要用反对易c数。为了把路径积分方法推广到费米子，我们就必须定义对反对易c数的泛函积分。

为此目的，我们采取这样的观点，即一个量子场论由它的费曼规则来定义。于是，费米子场区别于玻色子场仅在于费曼图中的费米子圈引进一个额外的 -1 因子。我们将把能重新给出这一规则的生成泛函，简单地写成一个路径积分。

考虑一个自由的旋量场，它与一个产生费米子-反费米子对的外源 $\Omega(x)$ 相耦合：

$$\mathscr{L}(x) = \overline{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi + \overline{\psi}\psi\Omega, \qquad (7.130)$$

其作用量为

$$\int d^4x\, \mathscr{L}(x) = -i\int d^4x\, \mathscr{L}(x_E)$$

$$= i\hbar[(\overline{\psi}, S_F^{-1}\psi) + (\overline{\psi}, \Omega\psi)], \qquad (7.131)$$

式中

$$(f,g) \equiv \int d^4x_E f(x_E) g(x_E),$$

$$S_F \equiv (i\gamma\cdot\partial - m)^{-1}. \qquad (7.132)$$

恰如上一节中的例子一样，所有的连通费曼图也都是单圈图。假如我们能用如下的路径积分公式定义生成泛函，即

$$\exp\frac{i}{\hbar}W[\Omega]\equiv\mathcal{N}\int(D\psi)\,(D\overline{\psi})\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\overline{\psi},(S_F^{-1}+\Omega)\,\psi)\right]$$

$$=\mathcal{N}'\det(S_F^{-1}+\Omega),\qquad(7.133)$$

我们就能正确地给出费曼规则。

为了看清如何能做到这一点，先来考虑由下式定义的两个反对易 c 数 η_1 和 η_2

$$\{\eta_1,\eta_2\}=0,\qquad \eta_1^2=\eta_2^2=0。\qquad(7.134)$$

η_1 和 η_2 的任何一个函数具有如下形式

$$f(\eta_1,\eta_2)=C_0+C_1\eta_1+C_2\eta_2+C_3\eta_1\eta_2,\qquad(7.135)$$

式中 C_i 是复数。"积分"运算用下述规则定义[4]

$$\int d\eta_1=0,\quad \int d\eta_2=0,$$

$$(7.136)$$

$$\int d\eta_1\,\eta_1=1,\quad \int d\eta_2\eta_2=1,$$

式中 $d\eta_1$ 和 $d\eta_2$ 假设为彼此反对易，而且它们与 η_1 及 η_2 也反对易。我们又定义

$$\int d\eta_1\eta_2\equiv-\eta_2\int d\eta_1,\qquad(7.137)$$

由此式得

$$\int d\eta\,f(\eta-\eta_0)=\int d\eta\,f(\eta)。\qquad(7.138)$$

利用这些规则计算（7.135）式的积分，求得

$$\int d\eta_1\,f(\eta_1,\eta_2)=C_1+C_3\eta_2,\qquad(7.139)$$

$$\int d\eta_2\int d\eta_1\,f(\eta_1,\eta_2)=C_3。$$

特别是，对于任何一个数 A

$$\int d\eta_2 \int d\eta_1\, e^{A\eta_1\eta_2} = \int d\eta_2 \int d\eta_1 (1 + A\eta_1\eta_2) = A. \tag{7.140}$$

我们可以把上述这些定义推广到任意多个反对易c数$\{\eta_i\}$

$$\{\eta_i, \eta_j\} = 0, \qquad \eta_i^2 = 0,$$

$$\int d\eta_i = 0, \qquad \int d\eta_i \eta_i = 1 \quad (\text{不求和}). \tag{7.141}$$

所有的$d\eta_i$彼此之间以及与所有的η_i都反对易。让我们把$\{\eta_i\}$分成两个不相交的集合$\{\eta_\alpha\}$和$\{\eta_\alpha^*\}$（星号*只起区分这两个集合的作用，不代表复共轭）。考虑二次型

$$X = \sum_{\alpha,\beta} \eta_\alpha^* A_{\alpha\beta}\, \eta_\beta \equiv \eta^* A \eta, \tag{7.142}$$

其中A是一个对称矩阵，它的矩阵元都是数。做一线性变换，可以把这个二次型约化为对角形式

$$X = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha \eta_\alpha^* \eta, \tag{7.143}$$

式中A_α是矩阵A的本征值。由于（7.141）式的缘故

$$e^X = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n, \tag{7.144}$$

$$\int (D\eta)(D\eta^*) e^X = \int (D\eta)(D\eta^*) \frac{X^n}{n!},$$

式中

$$(D\eta) = \prod_{\alpha=1}^{n} d\eta_\alpha, \qquad (D\eta^*) = \prod_{\alpha=1}^{n} d\eta_\alpha^*. \tag{7.145}$$

这些量的符号都依赖于其中的因子排列的次序。为了求得X^n的展开式中的一项，我们必须从n个X因子中的每一个取出一项，把它们乘起来。由于$\eta_\alpha^{*2} = \eta_\alpha^2 = 0$，所以，我们所选的所有的项都必须彼此不相同。因此，唯一可能的结果就是$\Pi_\alpha A_\alpha \eta_\alpha^* \eta_\alpha$。由于有$n!$种选择方式，所以我们有

$$X = n!\prod_a A_a \eta_a^* \eta_a, \tag{7.146}$$

因此（准确到一个正负号）

$$\int (D\eta)(D\eta^*)\, e^{\eta^* A\eta} = \prod_{a=1}^{n} A_a = \det A. \tag{7.147}$$

我们可以把这个公式看做是表示一个行列式的新方法。

更普遍的，设

$$Q(\eta, \eta^*) = \eta^* A\eta - b^*\eta^* - b\eta, \tag{7.148}$$

式中，A 是一个非奇异对称矩阵，它的矩阵元都是数；而 b^* 和 b 是 n 维矢量，它们的分量都是反对易 c 数。把上式改写成

$$Q(\eta, \eta^*) = (\eta^* - \eta_0^*) A (\eta - \eta_0) - b^* A^{-1} b,$$

$$\eta_0 = A^{-1}b, \qquad \eta_0^* = b^* A^{-1}. \tag{7.149}$$

于是，根据（7.138）式和（7.147）式，我们有（在一个正负符号范围内）

$$\int (D\eta)(D\eta^*)\, e^{Q(\eta,\eta^*)} = e^{-b^* A^{-1} b} \det A. \tag{7.150}$$

显然，现在要得到（7.133）式，我们所必须做的就是把旋量场 $\psi(x)$ 和 $\overline{\psi}(x)$ 用反对易 c 数表示，这首先就要求把 x 看做是分立的标号，然后在最终的结果中过渡到连续的极限。

对于一个与只产生粒子的外源相耦合的自由旋量场，我们取

$$\mathscr{L}(x) = \overline{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi + J\psi + J^*\overline{\psi}, \tag{7.151}$$

式中 $J(x)$ 和 $J^*(x)$ 是四分量的反对易 c 数。则产生带有外线的连通费曼图的生成泛函 $W[J, J^*]$，由

$$\exp\frac{i}{\hbar}W[J, J^*] = \mathscr{N}\int (D\psi)(D\overline{\psi}) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[(\overline{\psi}, S_F^{-1}\psi) + (J, \psi) + (J^*, \overline{\psi})\right]\right\}$$

$$= \mathscr{N}' e^{\hbar^{-1}(J^*, S_F J)} \det S_F^{-1} \tag{7.152}$$

给出。对于使用这一最后结果而言，J 和 J^* 是反对易 c 数还是普

通的数，是无关紧要的，因为它们是成对出现的。的确，用更常见的方法可以很容易导出这个结果；在这里，使用了反对易c数，看上去似乎是一种妙趣横生的作法。然而，这一方法的优点就在于它使我们能在平等的地位上用路径积分方法处理费米子场和玻色子场。当我们考虑彼此相互作用的费米子和玻色子时，这一点是很有用的。

参考文献

[1] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Mc Graw—Hill, New York, 1965).

[2] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* 128, 885 (1962), Appendix E.

[3] T. T. Wu, *Phys. Rev.* 125, 1436 (1962).

[4] F. A. Berezin, *Method of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).

第八章　规范场的量子化

8.1　正则量子化

规范场的量子化提出了一些与规范变换自由度有关的特殊问题。为了看清这些问题是如何出现的，我们先来回顾一下自由麦克斯韦场的正则量子化，它的经典拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}),$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla A^0. \tag{8.1}$$

独立变量是场变量$A^\mu(x)$和它们的时间微商 $\dot{A}^\mu(x)$，可以把$A^\mu(x)$看作坐标。当 $A^\mu(x)$ 由于规范变换 $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\omega$ 而改变时，$\mathscr{L}(x)$保持不变。

按照正则量子化规则，我们必须先把理论变成哈密顿形式，然后引进坐标与其相应的共轭动量之间的正则对易关系。注意到$\mathscr{L}(x)$不依赖于 $A^0(x)$，由此可知与 $A^0(x)$ 共轭的动量恒为零。因此 $A^0(x)$ 不是一个独立的坐标，可以通过经典的约束方程

$$\nabla^2 A^0 + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

把它消去。最简单的选择是设 $A^0 = 0$（从而取了一个特殊的洛仑兹参考系）。在经典理论中，这要求 $\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{A})/\partial t = 0$；在量子理论中它将被使希尔伯特空间受到限制的辅助条件所代替。取了 $A_0 = 0$ 以后，$\mathscr{L}(x)$在一个更局限的剩余规范变换 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A} - \nabla\omega$下不变，其中 ω 是一个与时间无关的函数。经典哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}\int d^3x[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{A})^2], \tag{8.2}$$

它也在这个剩余规范变换下保持不变。独立的变量是被看做坐标的场 $\boldsymbol{A}(x)$ 和它们的共轭动量 $-\boldsymbol{E}(x)$ 。这个理论，通过引入等时 (equal-time) 对易关系

$$[E^j(x),A^k(y)]_{x^0=y^0}=i\delta_{jk}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8.3}$$

而量子化。然后，由于剩余规范不变性的存在，并非 $\boldsymbol{A}$ 的所有三个分量都代表动力学自由度。为了完全确定这个理论，必须明确地消去非物理的自由度。

剩余规范不变性可以用下式表示

$$[H,\nabla\cdot\boldsymbol{E}]=0。 \tag{8.4}$$

换句话说，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 是一个运动常数。因而，纵分量 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 不是动力学变量，只由初始值和边界条件完全确定。纵分量 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$ 也完全被确定了，因为

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\boldsymbol{E}, \tag{8.5}$$

该式可直接由 $\partial\boldsymbol{A}/\partial t=i[H,\boldsymbol{A}]$ 导出。因此，只有横分量 $\boldsymbol{E}_\perp$ 和 $\boldsymbol{A}_\perp$ 是真正的动力学变量。它们的对易关系是 (8.3) 式的横向投影

$$[E^j_\perp(x),A^k_\perp(x)]_{x^0=y^0}=i\delta^{Tr}_{jk}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{8.6}$$

式中

$$\delta^{Tr}_{jk}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left[\delta_{jk}-\frac{p^jp^k}{|\boldsymbol{p}|^2}\right]. \tag{8.7}$$

哈密顿量可以改写成

$$H=\frac{1}{2}\int d^3x[\boldsymbol{E}_\perp\cdot\boldsymbol{E}_\perp+(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2]+\frac{1}{2}\int d^3x\boldsymbol{E}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{E}_{/\!/}. \tag{8.8}$$

最后一项是一个c数常量，没有什么物理意义。

剩余规范变换 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}-\nabla\omega$ 只影响到 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$，故而只引起总能

量的参考点改变．这样，为了简单，可以取$A_{//}=0$。那时，体系的所有的状态都将满足辅助条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，它代表加在体系的希尔伯特空间的一个限制。

为了从形式上更为详细地看到这一点，让我们把希尔伯特空间的态用坐标表象的$\Psi[\boldsymbol{A}]$来表示。那时，薛定谔算符 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 由下式表示

$$E^k(\boldsymbol{x})=i\frac{\delta}{\delta A^k(\boldsymbol{x})}. \tag{8.9}$$

根据（8.4）式，H 和$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 可以同时对角化．因此，可以把 H 的本征函数 $\Psi[\boldsymbol{A}]$选为也是$\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 的本征函数

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\Psi[\boldsymbol{A}]=\rho(\boldsymbol{x})\Psi[\boldsymbol{A}], \tag{8.10}$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x})$ 是一个任意函数。

在剩余规范变换下，$\Psi[\boldsymbol{A}]$变成 $\Psi[\boldsymbol{A}-\nabla\omega]$，我们可以把后者表示成[注a]

$$\begin{aligned}\Psi[\boldsymbol{A}-\nabla\omega]&=\left\{\exp\int d^3x[-\partial_i\omega(\boldsymbol{x})]\frac{\delta}{\delta A^i(\boldsymbol{x})}\right\}\Psi[\boldsymbol{A}]\\&=\exp\left(i\int d^3x\ (\nabla\omega)\cdot\boldsymbol{E}\right)\Psi[\boldsymbol{A}]\\&=\exp\left(-i\int d^3x\,\omega\nabla\cdot\boldsymbol{E}\right)\Psi[\boldsymbol{A}].\end{aligned} \tag{8.11}$$

现在，任何一个 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 都可以写成 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}_\perp(\boldsymbol{x})-\nabla\omega(\boldsymbol{x})$．这就是说，$\boldsymbol{A}$的纵分量是纯规范．在不存在外部磁通量时，一切纯规范场都可以连续地变换为零．这样，根据(8.10)式和(8.11)式，对任何$\boldsymbol{A}$，我们总可以写成

$$\Psi[\boldsymbol{A}]=e^{-i\chi}\Psi[\boldsymbol{A}_\perp], \tag{8.12}$$

其中

$$\chi=\int d^3x\omega\rho=\int d^3x\omega\nabla^2\left(\frac{1}{\nabla^2}\rho\right)=\int d^3x(\nabla^2\omega)\frac{1}{\nabla^2}\rho$$

[注 a] 我们相当轻率地丢掉了面积分项．实际证明这样做的正确性在于在麦克斯韦理论中不存在拓扑荷（见 8.6 节中对杨-密尔斯场的处理）．

$$= -\int d^3x(\nabla\cdot \boldsymbol{A})\frac{1}{\nabla^2}\rho$$

$$=\int d^3x\ d^3y\ \frac{[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]\rho(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}. \tag{8.13}$$

波函数$\Psi[\boldsymbol{A}_\perp]$是新哈密顿量

$$e^{i\alpha}He^{-i\alpha}=\frac{1}{2}\int d^3x\,[E_\perp^2+(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2]+$$

$$+\frac{1}{2}\int d^3xd^3y\frac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} \tag{8.14}$$

的本征函数。这个哈密顿量与H仅差一个常数，即一个任意的静态电荷分布的能量。在由$\Psi[\boldsymbol{A}_\perp]$所张成的物理的希尔伯特空间里，(8.10) 变成辅助条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\Psi[\boldsymbol{A}_\perp]=0, \tag{8.15}$$

它是用量子语言表述的高斯定律。通过把库仑规范$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$加到量子化前的经典理论上也可以求得与上述相同的结果。我们的做法比较清楚地阐明了在量子化以后的理论中选取一个规范意味着什么。

洛仑兹协变性的证明在库仑规范中是很复杂的，而在象洛仑兹规范$\partial_\mu A^\mu=0$这样的协变规范中就简单得多。然而，要改变规范，人们就得回到经典理论，一切要重新开始。一般来讲，不同的规范选取导致体系的希尔伯特空间的不同的定义。由于这个原因，当人们在讨论中必须转换规范时，正则量子化使用起来很不方便。

对于非阿贝尔规范理论，正则量子化要复杂得多[1]。例如，与高斯定律类似的是非线性约束

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_a+g\,C_{abc}\boldsymbol{A}_b\cdot\boldsymbol{E}_c=0, \tag{8.16}$$

它的解不会自然地把$\boldsymbol{E}_a$和$\boldsymbol{A}_a$分成横分量和纵分量。这样，库仑规范在这里似乎也不是自然得到的。在量子化理论中实现库仑规范的努力导致不定性[2]，它的起源可以追溯到拓扑荷的存

在[3]。通常使用的所有的线性规范条件中，看来没有一个是“自然的”。企图寻求一个在（8.16）式精确解的基础上的“自然的”规范，却得到一些很难处理的公式[4]。普遍的问题在于如何处理有约束的哈密顿量的体系。狄拉克曾提出过解决这个问题的一般形式[5][6]。有人也把它用到了非阿贝尔规范理论[7]，但在找到一种实用的计算方法上遇到的困难仍然没有解决。迄今，最好的方法似乎是费曼路径积分的法捷耶夫-波波夫（Fadeev-Popov）做法，我们将在以后讨论它。

对非阿贝尔规范场，仍然由于拓扑荷的存在，使（8.11）式的最后一步不成立。这导致出现稍后要讨论的“θ 世界”（θ worlds）。

8.2 哈密顿形式中的路径积分方法

哈密顿形式的路径积分，在最简单的例子中由（7.18）式给出。它从正则量子化直接导出，因此，原则上没有包含任何新的东西。然而，它使我们以简单得多的方式消去非物理的自由度。我们以自由的麦克斯韦理论为例来说明这一点。

经典的哈密顿量是

$$H=\int d^3x\left\{\frac{1}{2}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{A})^2]+\boldsymbol{E}\cdot\nabla A^0\right\}. \qquad (8.17)$$

独立的坐标是 $\boldsymbol{A}(x)$ 和 $A^0(x)$。$-\boldsymbol{E}(x)$ 与 $\boldsymbol{A}(x)$ 共轭，而与 $A^0(x)$ 共轭的动量却不存在。因此，$A^0(x)$ 不是一个动力学变量。设 $|\boldsymbol{A},t\rangle$ 由下式定义

$$\boldsymbol{A}_{op}(x,t)|\boldsymbol{A},t\rangle=\boldsymbol{A}(x)|\boldsymbol{A},t\rangle, \qquad (8.18)$$

它与（7.5）式相类似。于是，跃迁振幅为

$$\langle\boldsymbol{A}_2,t_2|\boldsymbol{A}_1,t_1\rangle=\mathscr{N}\int(DA^0)(D\boldsymbol{A})(D\boldsymbol{E})$$

$$\cdot \exp \frac{1}{i}\int_1^2 d^4x\left[\frac{1}{2}E^2+\frac{1}{2}(\nabla\times \boldsymbol{A})^2\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{E}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla A^0\right)\right], \tag{8.19}$$

其中 $A^0, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 和 t 的函数，积分$\int_1^2 d^4x$遍及t_1时刻和t_2时刻间的全部时空。相应的 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ 由下式所限制

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t_1)=\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t_2)=\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}). \tag{8.20}$$

我们立刻可以求出对 A^0 的路径积分

$$\int(DA^0)\exp i\int d^4x(\nabla\cdot\boldsymbol{E})A^0\propto\delta[\nabla\cdot\boldsymbol{E}]. \tag{8.21}$$

这要求 $\boldsymbol{E}$ 的纵分量为零。这样一来，$\int(D\boldsymbol{E})$ 可以用 $\int(D\boldsymbol{E}_\perp)$ 来代替，$\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$ 可以用 $\left(\boldsymbol{E}_\perp\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}_\perp}{\partial t}\right)$ 代替，$\left(\text{因为} \int d^3x\boldsymbol{E}_\perp\cdot\right.$ $\left.\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}_{/\!/}}{\partial t}=0\right)$，而

$$\langle \boldsymbol{A}_2,t_2|\boldsymbol{A}_1,t_1\rangle=\mathscr{N}\int(D\boldsymbol{A}_{/\!/})(D\boldsymbol{A}_\perp)(D\boldsymbol{E}_\perp)$$

$$\cdot\exp\frac{1}{i}\int_1^2 d^4x\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_\perp^2+\frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}_\perp}{\partial t}\right]$$

$$=\mathscr{N}\int(D\boldsymbol{A}_{/\!/})(D\boldsymbol{A}_\perp)\exp\frac{i}{2}\int_1^2 d^4x\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_\perp}{\partial t}\right)^2\right.$$

$$\left.-(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2\right]. \tag{8.22}$$

因为这个积分的被积函数与 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$ 无关，所以 $\int(D\boldsymbol{A}_{/\!/})$ 可以吸收到 $\mathscr{N}$ 中。这意味着 $\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{A}_1$ 的纵分量没有任何物理意义，因为它们只影响跃迁振幅的归一常数。这反映了该体系的规范不变性，因为 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$ 可以通过规范变换而随意改变。这样，我们以更加简练而又时髦的方式重新得到了库仑规范中正则量子化的全部结果。

我们注意到（8.22）式是路径积分的费曼形式

$$\langle \boldsymbol{A}_{\blacktriangle 2}, t_2 | \boldsymbol{A}_{\blacktriangle 1}, t_1 \rangle = \mathscr{N} \int (D\boldsymbol{A}_{\blacktriangle}) \exp i \int_1^2 d^4x \mathscr{L}_{\blacktriangle}(x),$$

$$\mathscr{L}_{\blacktriangle}(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}_{\blacktriangle}}{\partial t}\right)^2 - (\nabla \times \boldsymbol{A}_{\blacktriangle})^2\right]. \qquad (8.23)$$

这个结果是通过在库仑规范中消去非物理的自由度求得的，非物理场可以更普遍地定义为能通过规范变换消去的场。由于物理结果应是规范不变的，我们预期当用任何适当的规范条件消去非物理场时，上述的费曼形式都是正确的。

8.3 费曼路径积分：法捷耶夫-波波夫方法

前一节的例子暗示，只要把规范固定下来，费曼路径积分就是正确的。法捷耶夫和波波夫[8] 证明了如何能做到这一点。

未加修改的费曼公式的不适用性及其可能的补救办法可以最清楚地在如下的麦克斯韦理论中看到。其作用量为：

$$\begin{aligned} S[A] &= -\frac{1}{4}\int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int d^4x (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\partial_\mu A_\nu \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x A_\mu (g^{\mu\nu}\Box^2 - \partial^\mu\partial^\nu) A_\nu \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \widetilde{A}_\mu (g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu) \widetilde{A}_\nu. \end{aligned} \qquad (8.24)$$

其中 $\widetilde{A}_\mu$是A_μ的傅里叶变换[注 b]。动能算符（$g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu$）没有逆，因为它有本征函数 k^ν，相应的本征值为零。因此，传播子不存在。一种补救办法是用条件$k_\mu \widetilde{A}^\mu = 0$（洛仑兹规范）来限制$\widetilde{A}^\mu$，结果使本征矢量 k^ν 不再与物理结果有联系。

[注 b]，这两个$\widetilde{A}_\mu$ 本应各自有宗量k和$-k$，但由于$A_\mu(x)$是实函数，所以 $\widetilde{A}_\mu^*(k) = \widetilde{A}_\mu(-k)$。

为了从另一种观点来理解这个问题，我们注意到 $S[A]$ 是规范不变的，因此不依赖于任何可以通过规范变换而去掉的场。假若费曼路径积分中有这样的场包括在内，我们就会得到一个无穷大的体积因子。仅当这些场明确地被鉴别出来时才可以把上述无穷大因子吸收到归一常数中去，由此可见固定规范是十分必要的。

再从另一点看，规范固定的必要性还来自于如所周知的该理论的格林函数依赖于规范。因此，除非把规范定下来，否则生成泛函 $W[J]$ 是不能唯一确定的。

规范变换

$$U(x)=e^{-i\omega_a(x)L_a}$$

中，函数 $\omega_a(x)$ 是它的参量，其集合用 ω 代表。规范场 $A^\mu(x)\equiv A_a^\mu(x)L_a$ 的变换为

$$A^\mu\longrightarrow A_\mu^\omega,$$

$$A_\mu^\omega=UA_\mu U^{-1}+\frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1}. \tag{8.25}$$

固定规范的意思就是指我们对 A_a^μ 加上某种条件，常称之为规范条件。通常使用的一些规范条件为

$$\begin{aligned}&\text{洛仑兹规范:} && \partial_\mu A_a^\mu=0,\\ &\text{库仑规范:} && \nabla\cdot\boldsymbol{A}_a=0,\\ &\text{轴规范:} && A_a^3=0,\\ &\text{时间规范:} && A_a^0=0.\end{aligned} \tag{8.26}$$

一般的规范条件可以表示成

$$\hat{f}_aA=0\quad(a=1,\cdots,N)\ , \tag{8.27}$$

式中 $\hat{f}_a$ 是 $A_a^\mu(x)$ 的函数空间到自身的映射。可允许的 A 是那些被每一个 $\hat{f}_a(a=1,\cdots,N)$ 映射到零的 $A_a^\mu(x)$ 。

只要规范条件可以把所有的非物理的自由度都消去，从路径积分的哈密顿形式过渡到费曼形式就不会再有什么困难。那时，费

曼形式的跃迁振幅由下式给出

$$\langle A_2, t_2 | A_1, t_1 \rangle = \mathcal{N} \int_{A_1}^{A_2} (DA) e^{iS_{21}[A]} \mathcal{J}[A] \prod_{a=1}^{N} \delta[\hat{f}_a A], \tag{8.28}$$

其中

$$S_{21}[A] \equiv \int_1^2 d^4x \mathscr{L}(x),$$

而$\mathcal{J}[A]$ 是由下式定义的雅科比行列式

$$\int (DA) \mathcal{J}[A] \prod_{a=1}^{N} \delta[\hat{f}_a A] = 1. \tag{8.29}$$

实际上，只要弄清楚动能算符是否有逆，人们就可以识别一个特殊的规范条件是否可用。把跃迁振幅写成 $\langle A_2, t_2 | A_1, t_1 \rangle$ 时，不必明确地指出 $\boldsymbol{A}$ 的哪些分量是动力学变量，因为规范固定项自动地做了这件工作，非物理的场只影响到跃迁振幅的归一化。

法捷耶夫和波波夫提出了一种计算雅科比行列式$\mathcal{J}[A]$ 的简便方法。他们的方法附带的好处在于可以把规范条件放宽一些。不必要求 $\hat{f}_a A = 0$，可以允许 $\hat{f}_a A$ 取任何一种泛函形式，但对每一种泛函形式要规定一定的权重，结果使他们的方法具有很大的灵活性。下面我们就照他们的办法去做。

假定 $\hat{f}_a$ 有这样的性质，即只要给定任何一个 A，总可找到一个规范变换 ω 使得

$$\hat{f}_a A^\omega = 0. \tag{8.30}$$

这样，当给定 A 时，$\{\hat{f}_a\}$ 就确定了一个规范变换 $U(x)$ 。随着 x 的改变，$U(x)$ 在规范群流形中描绘出一条轨道。用 $\frac{1}{\Delta_f[A]}$ 来代表这条轨道的体积

$$\Delta_f[A] \int (D\omega) \delta[\hat{f} A^\omega] = 1, \tag{8.31}$$

其中 $(D\omega)=\prod\prod_a d\omega_a(x)$，而

$$\delta[\hat{f}A]=\prod_{a=1}^{N}\delta[\hat{f}_a A]. \tag{8.32}$$

显然 $\Delta_f[A]$ 是规范不变的

$$\Delta_f[A]=\Delta_f[A^\omega]. \tag{8.33}$$

把（8.31）式的两边对 A 积分，可以把该式变成

$$\left[\int(D\omega)\bigg/\int(DA)\right]\int(DA)\Delta_f[A]\delta[\hat{f}A]=1. \tag{8.34}$$

该式表明 $\Delta_f[A]$ 与雅科比行列式 $\mathscr{J}[A]$ 成正比。

为了计算 $\Delta_f[A]$，设 $f_a(x)$ 代表函数 $\hat{f}_a A$ 在 x 点的值

$$f_a(x)\equiv\hat{f}_a A(x). \tag{8.35}$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta_f^{-1}[A]&=\prod_x\prod_a\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_a\delta(f_a(x))\\&=\prod_x\prod_a\int_{-\infty}^{\infty}df_a(x)\delta(f_a(x))\frac{\partial(\omega_1(x),\cdots,\omega_N(x))}{\partial(f_1(x),\cdots,f_N(x))}\\&=\prod_x\det\left\|\frac{\partial\omega_a(x)}{\partial f_b(x)}\right\|_{f=0}\equiv\det\left(\frac{\delta\omega}{\delta f}\right)_{f=0}.\end{aligned} \tag{8.36}$$

最后一步定义了一个连续矩阵 $\dfrac{\delta\omega_a(x)}{\delta f_b(y)}$ 的泛函行列式，它的行指标为 (a,x) 而列指标为 (b,y)。

如果 A 满足规范条件，则（8.36）式中的条件 $f=0$ 就可以用 $\omega=0$ 代替，我们可以写成

$$\Delta_f[A]=\det\left(\frac{\delta f}{\delta\omega}\right)_{\omega=0}\quad(\text{当 }A\text{满足 }\hat{f}_a A=0\text{ 时}). \tag{8.37}$$

事实上，（8.37）式确定了任意 A' 的 $\Delta_f[A']$。因为根据假定，A' 可以通过规范变换变成 A，而又由（8.33）式知，$\Delta_f[A']=\Delta_f[A]$，为了算出（8.37）中的泛函行列式，只要对

A 做无穷小规范变换即可，这是非常方便的。

恒等式（8.31）可以推广为

$$\Delta_f[A]\int(D\omega)\prod_a \delta(\hat{f}_a A_a - g_a) = 1, \tag{8.38}$$

式中 $\{g_a\}$ 是一组任意的函数。这只不过是把 $\hat{f}_a$ 重新定义，使得规范条件变成 $\hat{f}_a A = g_a$，由于 g_a 与 A 无关，所以 $\Delta_f[A]$ 不受影响。现在，把（8.38）式两边同乘以任意的函数 $G[g] \equiv G[g_1 \cdots g_N]$，然后对所有的 g_a 求积分。结果得到一个更普遍的恒等式

$$\Delta_f[A]\frac{\int(D\omega)\,G[\hat{f}A]}{\int(Dg)G[g]} = 1. \tag{8.39}$$

利用这个公式，可以推导出比（8.28）式更普遍的跃迁振幅的表达式。指导思想是把（8.39）式插入到没有修改过的费曼路径积分中，然后尝试把与非物理场的积分相应的无穷大体积因子分离出来。

首先，我们有

$$\langle A_2, t_2 | A_1, t_1 \rangle = \frac{\mathcal{N}}{\int(Dg)G[g]}\int_{A_1}^{A_2}(DA)e^{iS_{21}[A]}\Delta_f[A] \cdot \int(D\omega)\,G[\hat{f}A^\omega]. \tag{8.40}$$

然后，把 $\int DA$ 与 $\int D\omega$ 交换，由于 DA、$S[A]$ 和 $\Delta_f[A]$ 都是规范不变的，它们可以分别用 DA^ω、$S[A^\omega]$ 和 $\Delta_f[A^\omega]$ 代替。新的积分变量 A^ω 可以重新改称为 A，这样，我们求得

$$\langle A_2, t_2 | A_1, t_1 \rangle = \frac{\mathcal{N}\int(D\omega)}{\int(Dg)G[g]}$$

$$\cdot\int_{A_1}^{A_2}(DA)e^{iS_{21}[A]}G[\hat{f}A]\Delta_f[A]. \quad (8.41)$$

请注意，我们已经分离出了一个因子 $\int(D\omega)$ ，它恰恰是来自于对可以通过规范变换去掉的场积分得到的体积。把这个常数和 $\int(Dg)G[g]$ 一起吸收到$\mathcal{N}$中，最后求得

$$\langle A_2,t_2|A_1,t_1\rangle=\mathcal{N}\int_{A_1}^{A_2}(DA)\,e^{iS_{21}[A]}G[\hat{f}A]\Delta_f[A]. \quad (8.42)$$

在规范 $\hat{f}_a A=0$ 下，格林函数的生成泛函 $W[J]$ 由下式给出

$$e^{iW[J]}=\mathcal{N}\int(DA)e^{iS[A]+i(J,A)}G[\hat{f}A]\Delta_f[A], \qquad (8.43)$$

式中

$$S[A]=\int d^4x\mathscr{L}(x),$$

$$(J,A)=\int d^4xJ_{a\mu}(x)A_a^\mu(x). \qquad (8.44)$$

在 $S[A]$ 和 (J,A) 中的积分 $\int d^4x$ 是先变到欧几里得空间定义的，然后再延拓回到闵可夫斯基空间。因为我们知道，这样做只是在传播子中补充了正确的 $i\varepsilon$ 项，所以我们并不总是明显地指出这一点，但在理解这个结果时应如上述。

8.4 自由麦克斯韦场

作用量是

$$S[A]=-\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\widetilde{A}_\mu(g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu)\widetilde{A}_\nu. \qquad (8.45)$$

最方便的做法是把 $\widetilde{A}^\mu$ 分解成横分量和纵分量（在四维意义上）

$$\widetilde{A}^\mu=\widetilde{A}_T^\mu+\widetilde{A}_L^\mu,\quad (k\cdot\widetilde{A}_T=0). \qquad (8.46)$$

横向和纵向的投影算符是

$$P_T^{\mu\nu}(k)=g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \qquad (8.47)$$

$$P_L^{\mu\nu}(k)=\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}.$$

作为指标为 μ，ν且度规为 $g^{\mu\nu}$ 的矩阵，它们具有下述性质

$$\begin{aligned}
&P_T^2=P_T, && P_L^2=P_L,\\
&P_T+P_L=1, && P_T\cdot P_L=0,\\
&\widetilde{A}_T=P_T\widetilde{A}_T, && \widetilde{A}_L=P_L\widetilde{A}_L.
\end{aligned} \tag{8.48}$$

于是，用矩阵符号，可以把作用量写成

$$S[A]=-\frac{1}{2}(\widetilde{A},\ \widetilde{K}\widetilde{A}), \tag{8.49}$$

其中

$$\widetilde{K}^{\mu\nu}=k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu=k^2P_T(k). \tag{8.50}$$

1. 洛仑兹规范

取$\widetilde{f}$为

$$\hat{f}A(x)\equiv\partial_\mu A^\mu(x),\quad \hat{f}\widetilde{A}(k)\equiv ik\cdot\widetilde{A}(k). \tag{8.51}$$

其中$\widetilde{A}^\mu$ 是 A^μ 的傅氏变换。给 $\hat{f}A$ 规定的权重有赖于尚未确定的泛函 G 的选择。我们先来计算 $\Delta_f[A]$ 。设 $\widetilde{A}$满足 $k\cdot\widetilde{A}=0$。在无穷小规范变换下，$\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{f}\equiv\hat{f}A$ 的变化分别为

$$\delta A^\mu=ik^\mu\delta\widetilde{\omega},\quad \delta\widetilde{f}=-k^2\delta\widetilde{\omega}. \tag{8.52}$$

因此

$$\left(\frac{\delta\widetilde{f}}{\delta\widetilde{\omega}}\right)_{\omega=0}=-k^2,$$

$$\Delta_f[A]=\det\left(\frac{\delta\widetilde{f}}{\delta\widetilde{\omega}}\right)_{\omega=0}=-\prod_k k^2. \tag{8.53}$$

由此可见，$\Delta_f[A]$ 是发散的，但不依赖于 A。因此可以把它吸收到$\mathcal{N}$中。于是

$$e^{iW[J]}=\mathcal{N}\int(DA)e^{iS[A]+i(J,A)}G[\hat{f}A]\ . \tag{8.54}$$

我们仍然有选择 G 的自由。

首先考虑选 $G[f]=\delta[f]$。这相当于横向洛仑兹规范，或兰道规范。我们有

$$\delta[\hat{f}A]=\prod_k\delta(k\cdot\tilde{A})=\prod_k\delta(k\cdot\tilde{A}_L). \quad (8.55)$$

这要求 $k\cdot\tilde{A}_L=0$，它只能被 $\tilde{A}_L\equiv 0$ 满足，因此

$$e^{iW[J]}=\mathscr{N}\int(DA_T)e^{iS[A_T]+i(J,A_T)}. \quad (8.56)$$

事实上，$S[A_T]=S[A]$，然而，仅限于 $\tilde{A}_T$ 空间时，$\tilde{K}$ 是非奇异的，因为 $\tilde{K}$ 仅有的本征值为零的本征函数都是纵场。易证

$$\tilde{K}^{-1}=\frac{1}{k_2}P_T(k), \quad (8.57)$$

该式在

$$\tilde{K}\tilde{K}^{-1}=P_T(k) \quad (8.58)$$

的意义上成立。

于是，我们可以计算（8.56）中的路径积分，得到

$$\begin{aligned}e^{iW[J]}&=\mathscr{N}\int(DA_T)\exp\left(-\frac{i}{2}(A_T,\tilde{K}A_T)+i(\tilde{J},\tilde{A}_T)\right)\\&=\mathscr{N}(\det\tilde{K})^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{i}{2}(\tilde{J}_T,\ \tilde{K}^{-1}\tilde{J}_T)\right).\end{aligned} \quad (8.59)$$

由于 $\tilde{K}^{-1}$ 与 P_T 成正比，所以 $\tilde{J}_T$ 可以用 $\tilde{J}$ 来代替。把上式前面的常数取为 1，则得到如所周知的结果

$$\begin{aligned}W[J]&=\frac{1}{2}(\tilde{J},\tilde{K}^{-1}\tilde{J})=\frac{1}{2}\int d^4xJ_\mu(x)D^{\mu\nu}(x-y)J_\nu(y),\\D^{\mu\nu}(x)&=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2+i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2+i\varepsilon}\right).\end{aligned} \quad (8.60)$$

其中 $i\varepsilon$ 是由于把（$\tilde{J},\tilde{K}^{-1}\tilde{J}$）定义为欧几里得空间的积分而引起的。

其次，考虑选取

$$G[\hat{f}A]=\exp\frac{i}{2\lambda}\int d^4x(\hat{f}A)^2=\exp\frac{i}{2\lambda}\int d^4x(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (8.61)$$

式中 λ 是一个实的参量。通常选 λ 为

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 1 \quad \text{(费曼规范)}, \\
\lambda &= 0 \quad \text{(兰道规范)}.
\end{aligned}
\tag{8.62}
$$

后者使（8.61）成为前面讨论过的 $G[f]=\delta[f]$ 的情况。现在，我们有

$$
e^{iW[J]} = \mathscr{N}\int (DA)\exp i\left[-\frac{1}{2}(A,KA)+(J,A)\right], \tag{8.63}
$$

其中 $$K^{\mu\nu} = -\left[g^{\mu\nu}\square^2 - \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right], \tag{8.64}$$

它的傅氏变换为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{K}^{\mu\nu} &= k^2\left[g^{\mu\nu}k^2 - \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right] \\
&= k^2\left[P_T^{\mu\nu}(k) + \frac{1}{\lambda}P_L^{\mu\nu}(k)\right].
\end{aligned}
\tag{8.65}
$$

易证

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{K}^{-1})^{\mu\nu} &= \frac{1}{k^2}[P_T^{\mu\nu}(k) + \lambda P_L^{\mu\nu}(k)] \\
&= \frac{1}{k^2}\left[g^{\mu\nu} - (1-\lambda)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right].
\end{aligned}
\tag{8.66}
$$

于是

$$
W[J] = \frac{1}{2}(\widetilde{J},\widetilde{K}^{-1}\widetilde{J}) = \frac{1}{2}\int d^4x J_\mu(x) D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y),
$$

$$
D^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2+i\varepsilon}\left[g^{\mu\nu} - (1-\lambda)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2+i\varepsilon}\right].
\tag{8.67}
$$

如所周知，当麦克斯韦场与守恒流耦合时，正比于 $k^\mu k^\nu$ 的项不会对费曼图有贡献。因此，有着不同 λ 值的洛仑兹规范在物理上是等价的。

$D^{\mu\nu}$ 在洛仑兹变换下是一个张量，这件事本身并不能使该理论就是洛仑兹不变的，因为 $D^{\mu\nu}$ 不是一个物理量。为了证明洛仑

兹不变性，必须证明 S 矩阵是不变的。在自由场情况下，这个矩阵就是 $\varepsilon_\mu D^{\mu\nu}\varepsilon_\nu$，其中 ε^μ 是自由光子的极化矢量。洛仑兹不变性依赖于 ε^μ 是一个在某个洛仑兹参考系内可以变成 $\varepsilon=(0,\boldsymbol{\varepsilon}_\perp)$ 形式的四维矢量。于是，(8.67) 式明显的不变性只不过形式上很漂亮；分量 $J_{//}$ 和 J_0 实际上在抽取物理结果时不起任何作用。

2. 库仑规范

选 $\hat{f}$ 和 G 为

$$\hat{f}A(x)\equiv\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x),$$

$$G[\hat{f}A]\equiv\exp\frac{i}{2\lambda}\int d^4x[\nabla\cdot\boldsymbol{A}(x)]^2. \tag{8.68}$$

那时

$$\Delta_f[A]=-i\prod_k|\boldsymbol{k}|^2, \tag{8.69}$$

它与 A 无关，故可略去。这样

$$e^{iW[J]}=\mathcal{N}\int(DA)\exp i\left\{S[A]+(J,A)+\frac{1}{2\lambda}\int d^4x\,(\nabla\cdot\boldsymbol{A})^2\right\}. \tag{8.70}$$

为使该式成为伪不变量形式 (mock-invariant form)，我们把括号中的第三项写成

$$\int d^4x\,(\nabla\cdot\boldsymbol{A})^2=-\int d^4xA_i\partial^i\partial^jA_j=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{A}_ik^ik^j\tilde{A}_j$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{A}_\mu s^\mu s^\nu\tilde{A}_\nu, \tag{8.71}$$

式中

$$s^\mu\equiv(0,\boldsymbol{k}). \tag{8.72}$$

于是

$$e^{iW[J]}=\mathcal{N}\int(DA)\exp i\left[-\frac{1}{2}(\tilde{A},\tilde{K}_c\tilde{A})+(\tilde{J},\tilde{A})\right]$$

$$=\exp\frac{i}{2}(\tilde{J},\tilde{K}_c^{-1}\tilde{J}), \tag{8.73}$$

其中

$$\widetilde{K}_c^{\mu\nu}=k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu+\frac{1}{\lambda}s^\mu s^\nu. \tag{8.74}$$

为了求 $\widetilde{K}_c$的逆，我们设

$$(\widetilde{K}_c^{-1})^{\mu\nu}=C_1g^{\mu\nu}+C_2k^\mu k^\nu+C_3s^\mu s^\nu+C_4k^\mu s^\nu+C_5s^\mu k^\nu, \tag{8.75}$$

然后，通过要求 $(\widetilde{K}\widetilde{K}^{-1})^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}$ 来确定系数 C_i。结果得到

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_c^{\mu\nu}\equiv(\widetilde{K}_c^{-1})^{\mu\nu}&=\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\left[g^{\mu\nu}+\left(1+\frac{\lambda k^2}{s^2}\right)\frac{k^\mu k^\nu}{s^2}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{s^2}(k^\mu s^\nu+s^\mu k^\nu)\right]\\&=\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\left[g^{\mu\nu}-\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}(k^\mu k^\nu-k^\mu s^\nu-s^\nu k^\mu)\right]+\\&\qquad+\frac{\lambda k^\mu k^\nu}{|\boldsymbol{k}|^4},\end{aligned} \tag{8.76}$$

它是库仑规范中光子的传播子．写得更明显些：

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_c^{ij}&=-\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)+\frac{\lambda k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^4},\\\widetilde{D}_c^{i0}&=\widetilde{D}_c^{0i}=\frac{\lambda k^0k^i}{|\boldsymbol{k}|^4},\\\widetilde{D}_c^{00}&=-\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}+\frac{\lambda k_0^2}{|\boldsymbol{k}|^4}.\end{aligned} \tag{8.77}$$

最后的结果是

$$W[J]=\frac{1}{2}(\widetilde{J},\widetilde{D}_c\widetilde{J}). \tag{8.78}$$

对于 $\lambda=0$ 的情况，它等价于 $G[f]=\delta[f]$

$$\begin{aligned}W[J]=&\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\widetilde{J}^i(k)\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\left(-\delta_{ij}+\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\widetilde{J}^j(k)\\&-\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{\widetilde{J}_0^2(k)}{|\boldsymbol{k}|^2},\end{aligned} \tag{8.79}$$

或

$$W[J]=\frac{1}{2}\int d^4xJ^i(x)D^{ij}(x-y)J^j(y)$$

$$-\int dx_0d^3xd^3y\frac{J_0(x)J_0(y)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|},\tag{8.80}$$

其中，D_c 是 $\widetilde{D}_c$ 的傅氏变换．第一项只包含 $\boldsymbol{J}_\perp$，因为 $\widetilde{D}_c(k)$ 与 $P_\perp(\boldsymbol{k})$ 成正比．最后一项与（8.41）式的最后一项类似．我们看到，体系被用最简明的有物理意义的项描写：当引入外流 J^μ 时，只有 $\boldsymbol{J}_\perp$ 使体系受到干扰，$\boldsymbol{J}_{\parallel}$ 根本不与体系耦合，而 J_0 只是使总能量的参考点移动．

3．时间规范和轴规范

时间规范 $A^0=0$ 和轴规范 $A^3=0$ 可以看做一个规范来处理，因为 $S[A]$ 实际上被定义为欧几里得空间的积分，而被积函数是转动不变的．当我们变换回到定义物理光子的闵可夫斯基空间时，这两种规范的差别就表现出来了．

按照惯例，欧几里得空间的量表示为

$$p_\mu=(\boldsymbol{k},-ik_0),\quad A_\mu=(\boldsymbol{A},iA_0)\;.\tag{8.81}$$

我们有

$$S[A]=-\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}[k^2A^\mu A_\mu-(k^\mu A_\mu)^2]$$

$$=-\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}A_\mu(p^2\delta_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)A_\nu,\tag{8.82}$$

式中为了简单省去了表示傅氏变换的“～”符号．设 A_μ 的一个分量为零，比如

$$A_4=0,\tag{8.83}$$

剩下的分量用 $A_i(i=1,2,3)$ 来代表．则

$$e^{iW[J]}=\mathcal{N}\int(D\boldsymbol{A})\exp\left[\frac{1}{2}(A,KA)+(J.A)\right],\tag{8.84}$$

其中

$$(A, B) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A_i(p) B_i(p),$$

$$K_{ij} = p^2\delta_{ij} - p_i p_j. \tag{8.85}$$

算出路径积分，得到

$$W[J] = -\frac{i}{2}(J, K^{-1}J) ,$$

$$K^{-1}_{ij} = \frac{1}{p^2}\left(\delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{p_4^2}\right). \tag{8.86}$$

注意，$p^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + p_4^2$。$A_4 = 0$ 的条件没有把规范完全固定下来。这一点表现在当 $p_4 = 0$ 时 K^{-1} 发散。然而，正如我们将看到的，这一点没有任何物理后果。

我们现在必须把（8.86）式变回到闵可夫斯基空间，使得我们可以通过把 $\boldsymbol{J}$ 的垂直分量（相对于 $\boldsymbol{k}$ 而言）用光子的波函数代替来计算 S 矩阵。

如果我们打算把 p_4 看做是虚的能量，则应该设

$$p_4 \longrightarrow -ik_0 - i\varepsilon \qquad (\varepsilon \to 0^+) ,$$

于是求得时间规范 $A^0 = 0$ 中的 $W[J]$ 为

$$W[J] = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} J^i \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k_0^2 + i\varepsilon}\right) J^j. \tag{8.87}$$

只有由 $\boldsymbol{J}_\perp(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k} = 0$ 定义的 $\boldsymbol{J}_\perp(\boldsymbol{k})$ 分量才是与物理有关的。

如果我们打算把其它的分量，比如 p_3，而不是 p_4 看作是虚能量，那么就应当取

$$p_3 \longrightarrow -ik_0 - i\varepsilon, \quad (\varepsilon \to 0^+) ,$$

$$p_1 = k_1, \quad p_2 = k_2, \quad p_4 = k_3,$$

由此求得轴规范 $A^3 = 0$ 中的 $W[J]$ 为

$$W[J] = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left[J_\perp^2 + J_{//}^2 - J_0^2 + \right.$$

$$+\frac{(\boldsymbol{J}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{k}-J_0k_0)^2}{k_3^2}\Big].\tag{8.88}$$

仍然只有对于 $\boldsymbol{J}_\perp$ 的依赖关系才是与物理有关的。

8.5 纯杨-密尔斯场

杨-密尔斯场比麦克斯韦场复杂得多，因为有非线性关系

$$F_a^{\mu\nu}=\partial^\mu A_a^\nu-\partial^\nu A_a^\mu-gC_{abc}A_b^\mu A_c^\nu.\tag{8.89}$$

它使得拉格朗日密度要复杂得多，即

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu}=\mathscr{L}_0(x)+\mathscr{L}_1(x),\tag{8.90}$$

其中

$$\mathscr{L}_0(x)=-\frac{1}{2}(\partial^\mu A_a^\nu-\partial^\nu A_a^\mu)\partial_\mu A_{a\nu},$$

$$\mathscr{L}_1(x)=-gC_{abc}A_a^\nu A_b^\mu\partial_\mu A_{c\nu}$$

$$-\frac{1}{4}g^2C_{abc}C_{ab'c'}A_b^\mu A_{b'\mu}A_c^\nu A_{c'\nu}.\tag{8.91}$$

$\mathscr{L}_0(x)$ 项对作用量贡献了一个与麦克斯韦理论形式上相同的项

$$S_0[A]\equiv\int d^4x\mathscr{L}_0(x)=\frac{1}{2}\int d^4xA_{a\mu}(g^{\mu\nu}\Box^2-\partial^\mu\partial^\nu)A_{a\nu}.\tag{8.92}$$

不幸的是，$\mathscr{L}_1(x)$ 使费曼路径积分成为非高斯型的，因而不能计算出它的具体形式。

一种做法是利用（7.52）式而写成

$$e^{iW[J]}=\mathscr{N}\int(DA)e^{iS[A]+i(J\cdot A)}G[\hat{f}A]\Delta_f[A]$$

$$=\left[\exp i\int d^4x\mathscr{L}_1\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]e^{iW_0[J]},\tag{8.93}$$

其中

$$e^{iW_0[J]}=\mathscr{N}\int(DA)e^{iS_0[A]+i(J\cdot A)}G[\hat{f}A]\Delta_f[A].\tag{8.94}$$

规范的固定是在 $W_0[J]$ 中完成的。通过微扰展开成 g 的幂级数，可以从 $W_0[J]$ 求得 $W[J]$。由于两个原因，这种做法远非令人满意。其一，由于 $\mathscr{L}_0$ 和 $\mathscr{L}_1$ 单独都不是规范不变的，所以我们看不到这个问题的基本对称性。其二，按这种做法，非微扰效应，诸如瞬子以及可能的夸克禁闭等很难处理。然而，至少在人们有理由相信微扰论适用时，(8.93) 式对微扰的计算就是有用的了。

对某些肯定不能使用标准微扰论的问题，把 $S[A]$ 在经典路径附近展开，从而在半经典近似的基础上建立一种新的微扰论[9]或许是更好的做法。但我们不准备讨论它。

尽管 $S_0[A]$ 有着与麦克斯韦理论相同的形式，规范变换的非线性特点却可以使 $\Delta_f[A]$，因而使 $W_0[J]$ 完全不同。一般来说，正如我们将看到的，这时会有虚构的"鬼场"出现。在本节剩下的部分，我们举例说明 $W_0[J]$ 的计算，但不推导费曼规则。

1. 轴规范

选 $\hat{f}_a A = A_a^3$。在满足 $\hat{f}_a A = 0$ 的场附近做无穷小规范变换 ω，则

$$\hat{f}_a A^\omega = \frac{1}{g}\partial^3\omega_a. \tag{8.95}$$

于是，$\dfrac{\delta f}{\delta\omega} = g^{-1}\partial^3$，故 $\Delta_f[A]$ 与 A 无关，可以吸收到归一常数中。由于这个缘故，杨-密尔斯场的正则量子化在轴规范中最简单[10]，而且费曼路径积分与正则量子化的等价性也可以以直接的方式明确地给以证明[11]。

2. 洛仑兹规范：法捷耶夫-波波夫鬼

选 $\hat{f}_a A = \partial_\mu A_a^\mu$。对于满足 $\partial_\mu A_a^\mu = 0$ 的 A，A_a^μ 的无穷小规范变

换为

$$\hat{f}_a A^a = \partial_\mu\left(A_a^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\omega_a + C_{abc}\omega_b A_c^\mu\right)$$

$$= \frac{1}{g}\Box^2\omega_a + C_{abc}(\partial_\mu\omega_b)A_c^\mu. \tag{8.96}$$

由此得到

$$\frac{\delta f_a}{\delta\omega_b} = \frac{1}{g}\delta_{ab}\Box^2 + C_{abc}A_c^\mu\partial_\mu,$$

$$\Delta_f[A] = \det\left(\frac{1}{g}\delta_{ab}\Box^2 + C_{abc}A_c^\mu\partial_\mu\right). \tag{8.97}$$

由于 $\Delta_f[A]$ 依赖于 A，因而不能被吸收。一种方便的做法是象7.9节中所采用的，把这个行列式改写成对于反对易c数场的路径积分

$$\Delta_f[A] = \int(d\eta^*)(d\eta)\exp\left[i\int d^4x\mathscr{L}_{鬼}(x)\right], \tag{8.98}$$

$$\mathscr{L}_{鬼}(x) = \eta_a^*(x)[\delta_{ab}\Box^2 + gC_{abc}A_c^\mu(x)\partial_\mu]\eta_b(x),$$

其中 η^* 和 η 是遵从费米统计、有着由（7.41）给出的反对易关系和积分法则的独立的标量场，人们称之为法捷耶夫-波波夫鬼。

取

$$G[f] = \exp\left[\frac{i}{2\lambda}\int d^4xf^2\right] = \exp\left[\frac{i}{2\lambda}\int d^4x(\partial_\mu A_a^\mu)^2\right], \tag{8.99}$$

得到

$$e^{iW[J]} = \int(D\eta^*)(D\eta)(DA)\exp\left[i\int d^4x\,(\mathscr{L}_{eff} + J_a A_a^\mu)\right], \tag{8.100}$$

其中

$$\mathscr{L}_{eff} = \frac{1}{2}A_{a\mu}\left[g^{\mu\nu}\Box^2 - \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right]A_{a\nu}$$

$$+ \frac{1}{2}\eta_a^*\Box^2\eta_b + \mathscr{L}',$$

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}_1 + \frac{1}{2}gC_{abc}(\eta_a^*\partial_\mu\eta_b)A_a^\mu, \tag{8.101}$$

而$\mathscr{L}_1$由（8.91）式给出。于是，该体系除了通常的耦合项$\mathscr{L}_1$外，还多出了规范场与零质量零自旋的鬼场的微商耦合项。由于没有任何物理的必要性对鬼场引入外源，所以在费曼图中这些鬼场只以闭合圈的形式出现。

8.6 θ 世界和瞬子

1. θ 世界的发现

开始，让我们设$A_a^0(x)=0$。在薛定谔计算符$A_a(\boldsymbol{x})$为对角的表象里，体系的波函数用$\Psi[\boldsymbol{A}]$表示，而共轭动量$-\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{x})$的表示为

$$E_a^k(\boldsymbol{x})=i\frac{\delta}{\delta A_a^k(\boldsymbol{x})}. \tag{8.102}$$

哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}\int d^3x(\boldsymbol{E}_a\cdot\boldsymbol{E}_a+\boldsymbol{B}_a\cdot\boldsymbol{P}_a), \tag{8.103}$$

其中
$$\boldsymbol{B}_a\equiv\nabla\times\boldsymbol{A}_a+\frac{1}{2}g\,C_{abc}\,\boldsymbol{A}_b\times\boldsymbol{A}_c. \tag{8.104}$$

利用 $\dfrac{\partial\boldsymbol{A}_a}{\partial t}=i[H,\boldsymbol{A}_a]$，我们求得算符等式

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}_a}{\partial t}=-\boldsymbol{E}_a. \tag{8.105}$$

经典上，存在剩余规范变换$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}^\omega$，（$\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{A}_aT_a$），而

$$\boldsymbol{A}^\omega=U\boldsymbol{A}U^{-1}+\frac{i}{g}U\nabla U^{-1},$$

$$U(\boldsymbol{x})=\exp[-i\omega_a(\boldsymbol{x})L_a], \tag{8.106}$$

其中$\omega_a(\boldsymbol{x})$与时间无关。对于无穷小的ω_a，$\boldsymbol{A}_a$的变化为

$$\delta\boldsymbol{A}_a=-\frac{1}{g}\nabla\omega_a+C_{abc}\omega_b\boldsymbol{A}_c. \tag{8.107}$$

在量子力学中，这种剩余规范不变性由下述方式表示

$$[\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_a, H]=0,$$

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_a=\nabla\cdot\boldsymbol{E}_a+gC_{abc}\boldsymbol{A}_b\cdot\boldsymbol{E}_c. \tag{8.108}$$

因此，可以选取 H 的本征函数 $\Psi[\boldsymbol{A}]$ 同时为 $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_a$ 的本征函数。干脆取 $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_a$ 的本征值为零，这样就给体系的希尔伯特空间加上了辅助条件

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{x})\Psi[\boldsymbol{A}]=0. \tag{8.109}$$

这是高斯定律的推广，它等价于引入库仑规范

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}_a=\nabla\cdot\boldsymbol{A}_a=0. \tag{8.110}$$

考虑在无穷远空间趋于常数的连续规范变换 $U(\boldsymbol{x})$[注c]。把这个常数乘上它的倒数，总可以使它变成1，而这个倒数总是群的一个元素。因此，可以考虑满足条件

$$U(\boldsymbol{x})\xrightarrow[|x|\to\infty]{}1 \tag{8.111}$$

的连续规范变换。

我们可以把 $U(\boldsymbol{x})$ 看做是普通的三维空间到规范群 G 的连续映射。这时，上述条件就把无穷远的空间看成了一个点，而这使空间的拓扑结构成为一个三维球 S^3。于是，我们只须考虑 $S^3\to G$ 的连续映射。博特（Bott）[12]给出一个定理，其表述如下：

S^3 到一个单纯李群 G 的任何一个连续映射都可以被连续地变形为一个到 G 的一个子群 $SU(2)$ 的映射。

这样一来，对于一个单纯规范群 G 的杨-密尔斯理论，只要考虑 $S^3\to SU(2)$ 即可。由于 $SU(2)$ 的群流形具有 S^3 的拓扑结构（见（4.22）），所以我们考虑 $S^3\to S^3$ 的连续映射。正如在5.2节提到的，这些映射分为许多由绕数 n 表征的同伦类。绕数就是S^3

[注c]我们只考虑 $U\to$ 常数，因为这对我们的目的是足够了。通过把体系置于一个大的但有限的盒子里，对 $\boldsymbol{A}$ 加上任何确定的边界条件，我们甚至可以排除 $U\nrightarrow$ 常数的可能性、通常假设大距离处的边界条件不会对定域现象有任何影响只是一种信念而已。

空间被 S^3 群流形覆盖的次数。作为第 n 个同伦类的表示，我们取

$$U_n(\boldsymbol{x}) = [v(\boldsymbol{x})]^n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$v(\boldsymbol{x}) = -\exp\frac{-i\pi\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}}{(\boldsymbol{x}^2+\rho^2)^{1/2}} \qquad (x^2 \equiv |\boldsymbol{x}|^2) \quad (8.112)$$

其中 ρ 是一个任意的数，而 $\tau_a/2$ $(a=1,2,3)$ 是 G 的 $SU(2)$ 子群的生成元。0 类的一般的元是任何一个可以连续地变形为恒等变换的规范变换。1 类的一般元是 $v(\boldsymbol{x})$ 与 0 类的一个元之积。$n+m$ 类的一般元是 n 类的一个元与 m 类的一个元之积。

假定 $\boldsymbol{A}$ 做了一个无穷小规范变换。则 $\Psi[\boldsymbol{A}]$ 按下式变化

$$\Psi[\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}] - \Psi[\boldsymbol{A}] = -\frac{i}{g}\int d^3x(-\nabla\omega_a + gC_{abc}\omega_b\boldsymbol{A}_c) \cdot \boldsymbol{E}_a\Psi[\boldsymbol{A}]$$

$$= \frac{i}{g}\left[\int d\boldsymbol{S}\cdot \boldsymbol{E}_a\omega_a - \int d^3x\omega_a \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}_a\right]\Psi[A]. \quad (8.113)$$

对于 0 类规范变换，由于 ω_a 在无穷远空间趋于零，所以上式的第一项为零。于是，$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$ 就是 0 类规范变换的生成元，在这类规范变换下，根据 (8.108) 式，$\Psi[\boldsymbol{A}]$是不变的。在 $n\neq 0$ 的同伦类的规范变换下，$\Psi[\boldsymbol{A}]$不一定是不变的。但由于哈密顿量是定域规范不变的，所以我们可以把所有的能量本征函数选成在规范变换上至多改变一个常数相因子，而且对所有的本征函数这个相因子必须是相同的，即

$$\Psi[\boldsymbol{A}_n] = e^{in\theta}\Psi[\boldsymbol{A}] \quad (n=0, \pm 1, \pm 2\cdots), \quad (8.114)$$

其中 $\boldsymbol{A}_n$ 是在第 n 类规范变换下 $\boldsymbol{A}$ 的变换结果，其典型的形式为

$$\boldsymbol{A}_n = v^n \boldsymbol{A} v^{-n} + \frac{i}{g}v^n\nabla v^{-n}. \quad (8.115)$$

我们将把真空态波函数用 $\Psi_\theta[\boldsymbol{A}]$表示。由 θ 表征的真空态称为"θ 真空"。

体系的希尔伯特空间被分成了由连续的 θ 参量标志的各个区域，每一个区域包含着在 θ 真空中建立起来的态。这些“θ 世界”彼此被超选择定则分隔开来，也就是说，它们只能靠非规范不变的相互作用沟通。在每一个 θ 世界里，真空态都是唯一的。

若 $\theta\neq 0$，则（8.114）要求这个唯一的真空态是复的，于是破坏了时间反演不变性。根据 CPT 定理，这意味着 CP 破坏[注d]。由（8.112）可见，在空间反射下，$v(\boldsymbol{x})\to[v(\boldsymbol{x})]^{-1}$，因而 $n\to -n$。这导致如下结论：若 $\theta\neq 0$，则 Ψ_θ 不是宇称的本征态。因此，不同的 θ 世界在物理上是不等价的。

我们把 0 类的规范变换称为“小”（small）规范变换，而把 ±1 类规范变换称为“大”（large）规范变换。这样，在小规范变换下，Ψ_θ 是不变的。但在大规范变换下，Ψ_θ 要改变一个相因子 $e^{\pm i\theta}$。为了得到 Ψ_θ 可能是什么样的一个粗略的概念，设 $\chi_n[A]$ 是 A 的这样一个泛函，它在下列意义上在 $\boldsymbol{A}_n$ 附近取“峰值”，即一个小规范变换使 χ_n 保持不变，而一个大规范变换使 χ_n 变成 χ_{n+1}。这些 χ_n 很象是量子力学中周期势场的特定极小位势附近取峰值的波函数。Ψ_θ 的一种直观表示可能是

$$\Psi_\theta[\boldsymbol{A}]\cong\sum_{-\infty}^{\infty}e^{in\theta}\chi_n[\boldsymbol{A}]. \tag{8.116}$$

因为它使（8.114）的性质具体地实现了。倘若做变分计算，这个表示或许是尝试波函数的很好的猜测，但是很可能不存在任何可以使(8.116)式成为准确表示的 χ_n。这种直观图象确实暗示着量子力学的穿透效应对于 Ψ_θ 的结构是有贡献的，而不同的 θ 真空能量是不同的。情况确是如此。正如我们现在要阐明的，穿透的机制就是瞬子。

[注d] θ 世界的 CP 破坏可以直接地转化为真实世界的 CP 破坏，因为当规范场与费米子耦合时，情况显著的发生了变化(见 12.9 节)。

2. 瞬子作为穿透解

把体系放到一个体积为V的大盒子里。对欧几里得时间间隔T的跃迁振幅为

$$\langle \boldsymbol{A}'' | e^{-HT} | \boldsymbol{A}' \rangle = \mathscr{N} \int_{A'}^{A''} (D\boldsymbol{A}) e^{-S_E[A]}, \tag{8.117}$$

式中省略了规范固定因子$G[f]\Delta_f[A]$，其中$\hat{f}_a A = \nabla \cdot \boldsymbol{A}_a$。欧几里得作用量为

$$S_E[\boldsymbol{A}] = -\int_{-T/2}^{T/2} dx_4 \int_v d^3x \mathscr{L}(x_E), \tag{8.118}$$

路径积分遍及满足下述要求的所有路径$\boldsymbol{A}_a(\boldsymbol{x}, x_4)$，即

$$\boldsymbol{A}_a(\boldsymbol{x}, T/2) = \boldsymbol{A}_a''(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{A}_a\left(\boldsymbol{x}, -\frac{T}{2}\right) = \boldsymbol{A}_a'(\boldsymbol{x}). \tag{8.119}$$

我们取$\boldsymbol{A}'$为某个$\boldsymbol{A}_0$，$\boldsymbol{A}''$为某个$\boldsymbol{A}_1$。事实上，取它们分别为0类和1类纯规范

$$\boldsymbol{A}'(x) = 0,$$

$$\boldsymbol{A}''(x) = \frac{i}{g} v(\boldsymbol{x}) \nabla v^{-1}(\boldsymbol{x}), \tag{8.120}$$

其中$v(\boldsymbol{x})$由(8.12)给定。在$T \to \infty$时，连接$\boldsymbol{A}'$和$\boldsymbol{A}''$的路径就是瞬子。为看到这一点，让我们回顾瞬子解(5.24)式和(5.28)式，可以把它们写得更清楚些，即

$$\boldsymbol{A}_{瞬子}(\boldsymbol{x}, x_4) = \frac{1}{g} \frac{i[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}] + \boldsymbol{\tau} x_4}{x^2 + x_4^2 + \rho^2}, \qquad (x^2 \equiv |\boldsymbol{x}|^2)$$

$$A^4_{瞬子}(\boldsymbol{x}, x_4) = -\frac{1}{g} \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{x}}{x^2 + x_4^2 + \rho^2}, \tag{8.121}$$

其中ρ是一个任意的参量。为了和我们在这里选取的规范一致，必须把上式变换成使$A^4_{瞬子} = 0$。这可以通过下述规范变换得到

$$U(\boldsymbol{x}, x_4) = -\exp\left[\frac{-i\pi\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}}{(x^2+\rho^2)^{1/2}}\phi(x^2, x_4)\right]$$

$$\phi(x^2, x_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{x_4}{(x^2+\rho^2)^{1/2}}. \qquad (8.122)$$

注意到 $\phi(x^2, x_4) \xrightarrow[x_4 \to \infty]{} 1$

$$\xrightarrow[x_4 \to -\infty]{} 0. \qquad (8.123)$$

因此 $U(\boldsymbol{x}, x_4) \xrightarrow[x_4 \to \infty]{} v(\boldsymbol{x})$ (8.124)

$$\xrightarrow[x_4 \to -\infty]{} 1.$$

于是，在 $A_4 = 0$ 规范下，我们有

$$\boldsymbol{A}_{瞬子}(\boldsymbol{x}, x_4) = U(\boldsymbol{x}, x_4)\left\{\frac{1}{g}\frac{i[(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}] + \boldsymbol{\tau}x_4}{x^2 + x_4^2 + \rho^2}\right\}U^{-1}(\boldsymbol{x}, x_4)$$

$$+\frac{i}{g}U(\boldsymbol{x}, x_4)\nabla U^{-1}(\boldsymbol{x}, x_4). \qquad (8.125)$$

当 $|x_4| \to \infty$ 时，第一项为 0．因此

$$\boldsymbol{A}_{瞬子}(\boldsymbol{x}, x_4) \xrightarrow[x_4 \to \infty]{} \frac{i}{g}v(\boldsymbol{x})\nabla v^{-1}(\boldsymbol{x})$$

$$\xrightarrow[x_4 \to -\infty]{} 0. \qquad (8.126)$$

这表明，在欧几里得时间，瞬子插入到由大规范变换区分开的两个场组态之间。在这种意义上，它就是“穿透解” (tunnelling solution) [13,14]。

θ 真空的能量 E_θ 由下式给出

$$e^{-E_\theta T} = \langle\theta|\, e^{-HT}\, |\theta\rangle$$

$$= \mathcal{N}\int(d\boldsymbol{A}'')(d\boldsymbol{A}')\int_{A'}^{A''}(D\boldsymbol{A})\Psi_\theta^*[\boldsymbol{A}'']e^{-S_E[A]}\Psi_\theta[\boldsymbol{A}'],$$

(8.127)

其中 $\int(d\boldsymbol{A}')$ 代表对不依赖于时间的函数 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})$ 的积分。通过假定路径积分 (8.127) 的最主要贡献来自稀薄“瞬子气”

(instanton gas) [15]，可以近似地计算出E_θ。

3. θ作用量

我们可以在希尔伯特空间做一个变换，去掉（8.114）式中的相因子$e^{in\theta}$，从而使所有的波函数都成为完全规范不变的，甚至在大规范变换下也是如此。这与我们在麦克斯韦理论中取$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$的做法类似。区别在于，在麦克斯韦理论中，变换后的哈密顿量除了移动了一个常数以外与原来的相同。然而，这里的哈密顿量却有实质性的改变。最容易实现这个变换的方法是用路径积分。那时，我们将得到一个变换后的作用量，称为"θ作用量"（θ-action）。

为导出一些对上述目的有用的工具，让我们来回顾由(5.5)式和（5.7）式给出的拓扑荷的定义，即

$$q[A]=\frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x_E\mathrm{Tr}(\widetilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu})=\frac{g^2}{4\pi^2}\int d^4x_E\partial_\mu X_\mu(A),$$

$$X_\mu(A)=\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}A_\alpha\partial_\beta A_\gamma+\frac{i}{g}A_\alpha A_\beta A_\gamma\right]. \qquad (8.128)$$

我们提醒读者，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_a\tau_a/2$，而且不区分上指标和下指标。例如，$A_k$是$\boldsymbol{A}$的分量，而$\partial_k$是$\nabla$的分量。我们由5.2节回想起，$q[\boldsymbol{A}]$是在连续规范变换下的不变量，且

$$q[A_{\text{瞬子}}]=1. \qquad (8.129)$$

在下面的讨论中，我们自始至终采用某种方便的边界条件，例如周期性边界条件，以使所有的空间面积分为零。这样做不会漏掉某些物理效应，这是我们必须做的假定[注e]。于是，我们有

$$q[A]=\frac{g^2}{4\pi^2}\int d^4x_E\left[\frac{\partial X_4(A)}{\partial x_4}+\nabla\cdot\boldsymbol{X}(A)\right]$$

$$=\frac{g^2}{4\pi^2}\left[\int d^3x\,X_4(A)\right]_{x_4=-\infty}^{x_4=\infty}. \qquad (8.130)$$

[注e] 参看前面第217页的脚注c。

现在，考虑薛定谔算符

$$N[A]\equiv\frac{g^2}{4\pi^2}\int d^3xX_4(\boldsymbol{A}). \tag{8.131}$$

直接的计算表明，$N[A]$在参量为ω的无穷小规范变换下是不变的，即

$$N[\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}]-N[\boldsymbol{A}]=-\frac{g^2}{8\pi^2}\int d^3x\nabla\cdot\mathrm{Tr}[\boldsymbol{A}\times\delta\boldsymbol{A}+i\omega\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}]$$
$$=0. \tag{8.132}$$

因此，在小规范变换下$N[\boldsymbol{A}]$是不变的

$$N[\boldsymbol{A}_0]=N[\boldsymbol{A}]. \tag{8.133}$$

而在大规范变换下，$N[\boldsymbol{A}]$改变±1，这一点可以证明如下．任何一个大规范变换可以通过先做一个小规范变换，接着再做$v(\boldsymbol{x})$的变换来实现，而在前一个规范变换下$N[\boldsymbol{A}]$是不变的．由此，根据（8.126）有

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_4\frac{\partial N[\boldsymbol{A}_{瞬子}]}{\partial x_4}=N[\boldsymbol{A}_1]-N[\boldsymbol{A}_0]. \tag{8.134}$$

另一方面，（8.129）和（8.128）式给出

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_4\frac{\partial N[\boldsymbol{A}_{瞬子}]}{\partial x_4}=1. \tag{8.135}$$

因此，再考虑到（8.133）式，我们有

$$N[\boldsymbol{A}_1]=N[\boldsymbol{A}]+1. \tag{8.136}$$

现在，可以着手我们的主要任务了．定义新的波函数$\Phi[\boldsymbol{A}]$为

$$\Phi[\boldsymbol{A}]\equiv e^{-i\theta N[A]}\Psi[\boldsymbol{A}]. \tag{8.137}$$

显然，$\Phi[\boldsymbol{A}]$是完全规范不变的，既使在大规范变换下也是如此．变换后的θ真空态用Φ_θ表示．利用$\Phi_\theta[\boldsymbol{A}]$可以把计算$E_\theta$的公式（8.127）式改写成

$$e^{-E_\theta T}=\mathcal{N}\int(d\boldsymbol{A}')(d\boldsymbol{A}'')\int_{A'}^{A''}(D\boldsymbol{A})\Phi_\theta^*[\boldsymbol{A}'']e^{-S_E[A,\theta]}\Phi_\theta[\boldsymbol{A}'], \tag{8.138}$$

其中，新作用量，称为“θ作用量”，由下式给出

$$S_E[A,\theta]=S_E[A]+iq[A]. \tag{8.139}$$

证明（此刻）是直截了当的。在闵可夫斯基空间，“θ作用量”为[注]

$$S[A,\theta]=S[A]-\theta q[A]. \tag{8.140}$$

我们指出附加的这一项不会改变运动方程，因为它是一个四度全散度（total 4-divergence）。在麦克斯韦理论中，这样的项完全无关，因为 $q[A]=0$。

设θ世界的“配分函数”用 Z_θ 表示

$$Z_\theta=\mathcal{N}\int(DA)e^{-S_E[A,\theta]}, \tag{8.141}$$

θ世界的平均拓扑荷为

$$\langle q\rangle=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln Z_\theta. \tag{8.142}$$

我们可把θ看做是确定θ世界拓扑荷平均值的拉格朗日乘子（Lagrange multiplier）。它与统计力学中的化学势类似，后者是确定重子数的系综平均值的拉格朗日乘子。

参考文献

[1] J. Schwinger. *Phys. Rev.*, 125, 1043(1962); 127, 324(1962).

[2] V. N. Gribov, *Nucl. Phys.* B139, 1(1978).

[3] R, Jackiw, I. Muzinich, and. C.Rebbi, *Phys. Rev.*, D17, 1576 (1978).

[4] J. Goldstone and R. Jackiw, *Phys. Letters*, 74B, 81(1978).

[5] P. A. M. Dirac, Cand. J. *Phys.*, 2, 129(1950); 3, 1(1951).

[注] 当把 $c[A]$ 由欧几里得空间变到闵可夫斯基空间时，注意到 $\widetilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\to\widetilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ $\left(\text{因为}\widetilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=-4\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=4\mathbf{B}\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_4}\right)$，因子 $-i$ 与由 $d^4x_E=id^4x$ 得到的因子 i 相消。

[6] A. Hanson, T.Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Academia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).
[7] N. Christ, A. Guth, and E. Weinberg, *Nucl. Phys.* B114, 61(1976).
[8] L. Fadeev and V. N. Popov, *Phys. Letters*, 25B, 29(1967).
[9] C. G. Callan, R. Dashen, and D. J. Gross, *Phys. Rev.*, D17 2717 (1978).
[10] R. Arnowitt and S. Ficker, *Phys. Rev.*, 127, 1821 (1962) sec. 5.
[11] S. Coleman, Secret Symmetry, in *Law of Hadronic matter*, Ed. A. Zichichi (Academic Press, New York, 1975), P. 193.
[12] R. Bott, *Bull. Soc. Math. France*, 84, 251 (1956).
[13] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, 37, 172(1976); C. G. Callan, R.F.Dashen and D. J. Gross, *Phys. Lett.*, 63B, 334 (1976).
[14] K. M. Bitar. and S. -J. Chang. *Phys. Rev.*, D17, 489 (1978)，给出了闵可夫斯基空间穿透解的讨论.
[15] S. Coleman, in *The Whys of Subnuclear Physics*, Ed. A. Zichichi (Plenum. Now York, 1980).

第九章 重 整 化

9.1 电荷重整化

为了对本章要讨论的题目提供一些基础知识，我们先从计算量子电动力学最低级近似下的电荷重整化（renomalization）开始。

在裸电荷（unrenormalized charge）e_0 的二级近似下完全的（full）光子传播子由图 9.1 所示的费曼图[1]表示，它给出的表达式为（在费曼规范下）

$$iD'_{\mu\nu}(k)=\frac{g_{\mu\nu}}{ik^2}+\frac{g_{\mu\alpha}}{ik^2}i\Pi^{\alpha\beta}(k)\cdot\frac{g_{\beta\nu}}{ik^2}, \tag{9.1}$$

其中，$\Pi^{\mu\nu}(k)$ 是真空极化张量（vacuum polarization tensor）．规范不变性要求 $k_\mu\Pi^{\mu\nu}(k)=0$．因此 $\Pi^{\mu\nu}(k)$ 必须为下列形式

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=e_0^2(g^{\mu\nu}k^2-k^\mu k^\nu)\Pi(k^2). \tag{9.2}$$

$iD'_{\mu\nu}(k)=$ [wavy line k] + [wavy line k – electron loop – wavy line k]

图 9.1 二级近似下的光子传播子

由最低级的费曼图得到

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=ie_0^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\frac{1}{\not p-m}\gamma^\nu\frac{1}{\not p-\not k-m}\right), \tag{9.3}$$

式中，m 是物理电子（physical electron）的质量．这个表达式是二次发散的，而不是（9.2）的形式．正如在 9.3 节将要讨论

的，补救这种情况的诀窍在于把 $\Pi^{\mu\nu}(k)$ 用 $\Pi^{\mu\nu}(k)-\Pi^{\mu\nu}(0)$ 代替，后者满足（9.2）式。这个手续还把二次发散约化为对数发散，并给出

$$\Pi(k^2)=-\frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{cm^2}+C(k^2),\tag{9.4}$$

式中 Λ 是截断动量，c 是一个依赖于截断方法的常数，$C(k^2)$ 是收敛的[2]

$$C(k^2)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right].\tag{9.5}$$

对于"对产生"（pair production）阈以下的 k^2，即 $k^2<4m^2$，这个函数是实函数。

根据（9.2）式，我们有

$$D'_{\mu\nu}(k)=-\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{d'(k^2)}{k^2}+（规范相关项）,\tag{9.6}$$

$$d'(k^2)=1+e_0^2\Pi(k^2).$$

电荷重整化就是减除 $d'(k^2)$ 中的对数发散，并把它吸收到重新定义的电荷 e 中。

定义一个有限的函数 $\widetilde{\Pi}$

$$\widetilde{\Pi}(k^2,\mu^2)\equiv\Pi(k^2)-\Pi(\mu^2)=C(k^2)-C(\mu^2),\tag{9.7}$$

其中 μ^2 是一个任意的数（重整化点），则

$$d'(k^2)=[1+e_0^2\Pi(\mu^2)]+e_0^2\widetilde{\Pi}(k^2,\mu^2).\tag{9.8}$$

设

$$Z(\mu^2)\equiv1+e_0^2\Pi(\mu^2)\tag{9.9}$$

准确到二级，可以写成

$$d'(k^2)=Z(\mu^2)[1+e_0^2Z(\mu^2)\widetilde{\Pi}(k^2,\mu^2)].\tag{9.10}$$

把物理的电荷取为

$$e^2(\mu^2)=e_0^2Z(\mu^2),\tag{9.11}$$

电荷的重整化就完成了。利用 $\alpha=e^2/4\pi$，可把上式改写为

$$\alpha(\mu^2)=\alpha_0 Z(\mu^2). \tag{9.12}$$

物理上有关的量 $\alpha_0 d'(k^2)$ ，现在可以写成

$$\alpha_0 d'(k^2)=\alpha(\mu^2)[1+4\pi\alpha(\mu^2)\widetilde{\Pi}(k^2,\mu^2)]. \tag{9.13}$$

通过取 $\mu=0$，求得标准的重整化传播子 $d_c(k^2)$为

$$d_c(k^2)=1+4\pi\alpha\widetilde{\Pi}(k^2,0), \tag{9.14}$$

其中 α 是实验上测得的精细结构常数

$$\alpha=\alpha(0)\cong 1/137. \tag{9.15}$$

这个理论的物理内容当然不依赖于重整化点的选择。不同的 $\alpha(\mu^2)$只不过相应于耦合常数的不同但等价的定义。而这个被称为"跑动耦合常数"（running coupling constant）的 $\alpha(\mu^2)$ 包含着重要的物理信息。为了看到这一点，请注意，（9.13）式的右边实际上并不依赖于 μ，而且根据（9.7）式$\widetilde{\Pi}(k^2,k^2)=0$。这样，通过依次选取 $\mu^2=k^2$ 和 $\mu^2=0$，我们得到

$$\alpha(k^2)=\alpha d_c(k^2). \tag{9.16}$$

于是，真空极化效应可以用两种方式来看。可以说它修改了虚光子（virtual photon）的传播子，同样也可以说，它使等效精细结构常数(effective fine-structure constant)与动量有关。重要的是要记住，$\alpha(k^2)$和 $\alpha d_c(k^2)$是可以互换的概念。

由我们前面的计算结果给出，在 α 的最低级近似下

$$\frac{\alpha(k^2)}{\alpha}=1+\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right]. \tag{9.17}$$

对于大的 $|k^2/m^2|$，我们可以得到

$$\frac{1}{\alpha(k^2)}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\pi}\ln\left|\frac{k^2}{m^2}\right| \qquad (|k^2/m^2|\gg 1). \tag{9.18}$$

由于当 $\alpha\ln|k^2/m^2|\sim 1$ 时微扰论肯定不再适用，所以（9.18）式应当只适用于

$$1\ll|k^2/m^2|\ll e^{137}. \tag{9.19}$$

在两个单位的检验电荷（以电子电荷为单位）之间的静电势

能为

$$V(r)=e^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{ik\cdot r}\left]\frac{d_c(k^2)}{-k^2}\right]_{k_0=0}$$

$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{ik\cdot r}}{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}4\pi\alpha(-\boldsymbol{k}^2). \qquad (9.20)$$

我们还可以写成

$$V(r)=\int d^3r'\frac{\rho(r')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \qquad (9.21)$$

其中

$$\rho(r)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{ik\cdot r}4\pi\alpha(-k^2) . \qquad (9.22)$$

这样，$\frac{4\pi\alpha(-\boldsymbol{k}^2)}{e}$就是真空中裸电荷 e_0 周围的电荷密度的傅氏变换，即与真空极化有关的“电荷形状因子”(charge form factor)．

让我们来定性地描述由真空极化感应出的电荷云。离裸电荷很远的地方，就可以看到重整化后的电荷，因为

$$V(r)\xrightarrow[r\to\infty]{}\frac{\alpha}{r}, \qquad (9.23)$$

它是由 $\alpha(0)=\alpha$ 导出的．在约为电子康普顿波长$\frac{1}{m}$的距离上，我们开始看到比重整化后的电荷要大的等效电荷．这可以由 $\alpha(-k^2)$随 k^2 变大而增加推论出来．因此，真空极化的效应就是屏蔽裸电荷．随着人们穿入电子云越深，屏蔽效应越小，看到的裸电荷也就越多．对这一情况的了解在$r\sim e^{-137}/m$ 处中止了，因为对于更短的距离微扰论不再成立．由微扰论，我们不能告诉人们，裸电荷是无穷大（如微扰论所暗示的），还是实际上是有限的．这个问题很可能在量子电动力学范围内有数学答案，但它并不与物理有关，因为在我们远没有达到 $r\sim e^{-137}/m$ 时，量子电动力学中没有考虑的其它相互作用肯定会变成重要的了．

在量子色动力学中与$\alpha(-k^2)$类似的，是一个随k^2的增加而减小的函数。于是，在$k^2\to\infty$时等效耦合为零，这就是所谓的“渐近自由”（asymptotic freedom）现象。在这种情况下，真空极化不是屏蔽裸电荷，而是“反屏蔽”（anti-screen）的。

下一节我们将扩充关于重整化的知识。不关心这一问题细节的读者可以跳到9.3节。

9.2 量子电动力学中的重整化

我们极其简略地叙述量子电动力学中所有阶的重整化方案[3]，目的是要指出上一节中的二级近似计算如何推广到更高阶，而且要说明在任何一种把一个场论重整化的认真的尝试中所包含的错综复杂和机敏巧妙。

1. 费曼图的发散

对任何一个费曼图，设

n= 顶点数目，

E_i= 电子内线数目，E_e= 电子外线数目，

P_i= 光子内线数目，P_e= 光子外线数目，

它们之间的关系为

$$E_i=n-\frac{1}{2}E_e,\quad P_i=\frac{1}{2}(n-P_e). \tag{9.24}$$

一个图的独立的内部四维动量数目为$N=E_i+P_i-(n-1)$，根据（9.24）它可以表示为

$$N=\frac{1}{2}(n-E_e-P_e)+1. \tag{9.25}$$

可以简要地把一个图表示成

$$\text{图}\sim\int\frac{d^{4N}k}{(k^2)^{P_i}k^{E_i}}. \tag{9.26}$$

上述积分通常是发散的，应该通过引入截断动量 Λ 使其成为有限，最后再让 Λ 趋于无穷大。重整化是一种这样的手续，通过它我们从上述积分中减除适当的项以使其在 $\Lambda\to\infty$ 的极限时变成有限，并把减除掉的项吸收到质量和电荷的重整化中。

一个发散的图，当截断它的任何一条内线(即，当任何一个积分变量保持固定值)就能使其变成收敛时，我们就定义它为原始发散图 (primitively divergent graph) 。任何一个发散图，只要截断足够多条内线都可以约化为原始发散图。这是很显然的，因为当所有的内线都被截断时，这个图就变成收敛的了。

原始发散图的表观发散度 (superfical degree) 可以通过朴素的数幂 (power counting) 方法求得[注a]

$$d=4N-2P_i-E_i. \tag{9.27}$$

实际的发散度可能比 d 小。利用 (9.24) 式和 (9.25) 式，我们可以改写成

$$d=4-P_e-\frac{3}{2}E_e. \tag{9.28}$$

注意，d 与 n 无关，并随外线数目的增加而减少。这正是使该理论成为可重整理论的关键。

原始发散图只有有限的几种，可以把它们按 P_e 和 E_e 来分类，结果列在表 9.1 中。如这个表所指出的，更细致的考虑把这些图减少为三类：

——本征电子自能图 (SE)；

——本征光子自能图；

——本征顶角图。

“本征”一词就是指“单粒子不可约”。它代表不能通过只截断一条内线而成为不连通的一种连通图。

[注a]非原始发散积分的发散度不可能由数幂方法求得。例如，积分 $\int dkdpk^{-1}p^{-2}$ 是对数发散的，但朴素的数幂法给出 $d=-1$。

只考虑连通的非真空图就够了。对任何这类图，我们定义，通过去掉所有嵌入原图内部的自能和顶角而得到的图为它的骨架图（skeleton graph）。骨架图可以是收敛的，也可以是发散的。如果发散，则一定是原始发散。

为了证明最后的这个说法是正确的，我们假定结论恰恰相反。那时，通过截断足够多条内线，可以把这个骨架图约化成几个部分（可能是不连通的），其中的一个部分是原始发散的。如表 9.1 所示，这个原始发散图一定是自能图或者是顶角图。但根据定义，这些图已经被去掉了（矛盾）。

对于一个任意的连通的非真空图，我们对它的可能发散作如下处理：

a. 去掉所有嵌入部分而得到骨架图。

b. 如果骨架图是收敛的，则无需再做减除。那时，只要把重整化后的自能和顶角重新嵌入，这个图的重整化就完成了。

c. 如果骨架图是发散的，它一定是自能图或者是顶角图。于是问题又归结为自能图和顶角图的重整化。

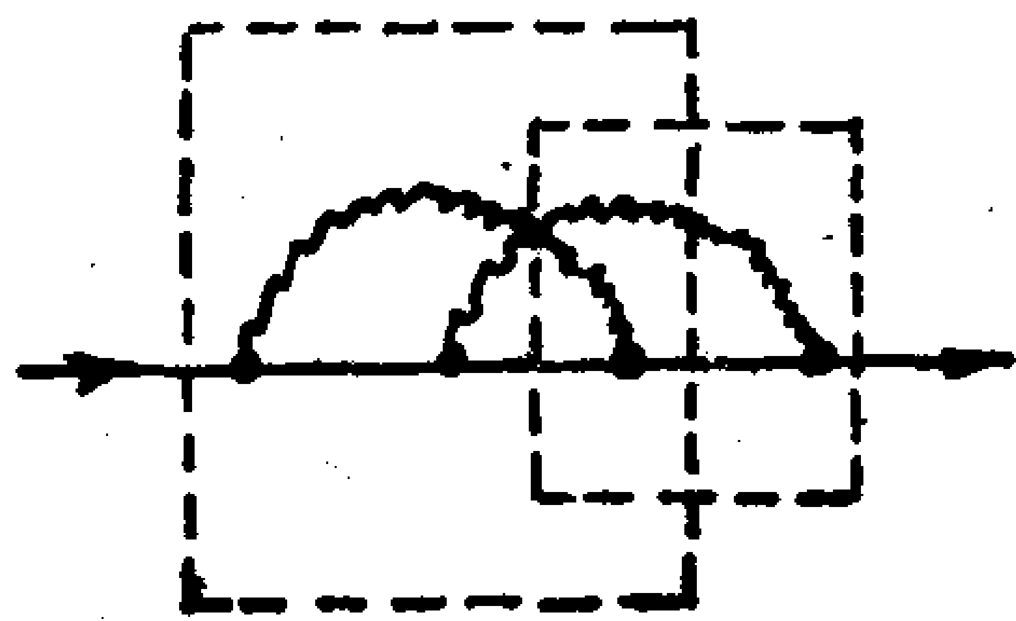
由上述可见，要把一个 n 阶的一般的图重整化，只要把小于或者等于 n 阶的所有的自能和顶角图重整化就够了。这样，重整化可以在微扰论中逐级进行。

由于可能存在“交缠无穷大”（overlapping divergence），如图 9.2 中所示的一些例子，而使自能图的重整化产生了一些复杂性，在那种情况下去掉嵌入图的方法并不总是唯一的。问题在于，尽管骨架图是唯一的，但把重整化后的图重新嵌入的方法并不唯一，于是会有双重计数的危险。正如我们将看到的，沃德-高桥（Ward-Takahashi）恒等式巧妙地回避掉了电子自能图中存在的这个问题。对于光子的自能图可以想出类似的办法。

还有另外一种重整化方案，即 BPH 方法[4]，它不用骨架图的表示方法，但我们不准备在这里讨论它。

表 9.1　原始发散图

P.	E.	d	例	附注
0	0	4		真空图。（可以忽略）
0	2	1		电子自能图。表观线性发散。实际对数发散。
1	2	0		顶角。对数发散。
2	0	2		光子自能。表观二次发散。实际由于有规范不变性而成为对数发散。
3	0	1		根据法雷定理（Furry's theorem），它与电子的箭头反向的图抵消（略去。）
4	0	0		与外动量的置换对应有 4! 个图，它们的和是收敛的。实际上，根据规范不变性，它的收敛比表观收敛更强些。



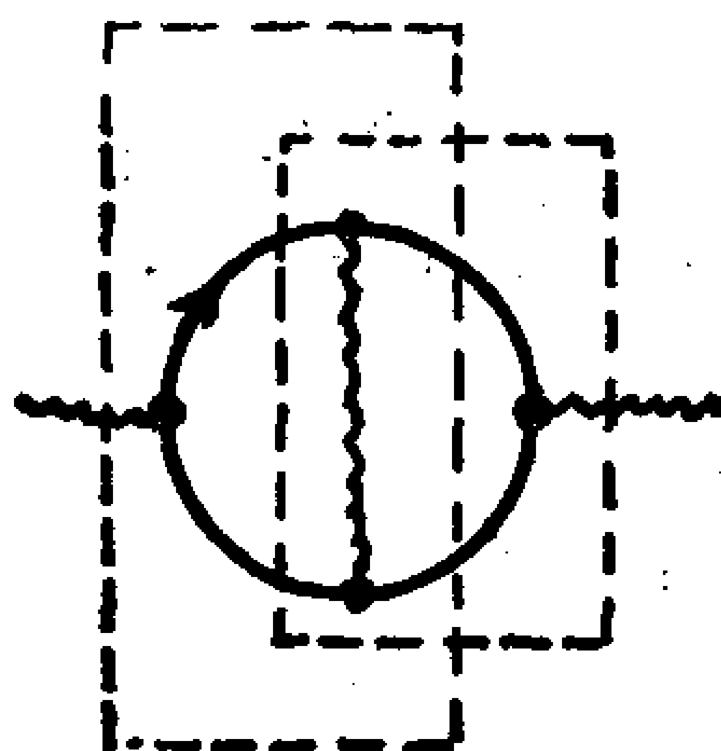


图 9.2　交错无穷大

我们采用下列一些符号

$S'(p)$ = 动量为 p 的完全电子传播子，

$D'_{\mu\nu}(k)$ = 动量为 k 的完全光子传播子，

$\Gamma_\mu(p,p')$ = 截掉外线的完全顶角，电子以动量 p 进入，以动量 p' 离开。

2. 顶角

设

$$\Gamma_\mu(p,p') = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p,p'). \tag{9.29}$$

Λ_μ 的图如图 9.3(a)所示，图 9.3(b)画出了它的骨架图展开。这种情况下没有交缠无穷大问题。所有骨架图的和用 Λ^s_μ 表示，它是对数发散的。

图 9.3 (a)本征顶角图；(b)骨架顶角图

为了由 Λ^s_μ 求出 Λ_μ，我们把 Λ^s_μ 的图中所有的自由传播子和裸的顶角用相应的完全传播子和完全顶角来代替。这可以表示为

$$\Lambda_\mu(p,p') = \Lambda^s_\mu[S',D'_{\alpha\beta},\Gamma_\nu;\ e_0^2,p,p'], \tag{9.30}$$

式中 Λ^s_μ 被看作是传播函数和顶角函数的泛函，而裸电荷的平方 e_0^2 以及动量 p，p' 作为泛函的参量出现。在这种意义上，图 9.3

(b)中的图形级数相应于 $\Lambda_\mu^*[S,D_{\alpha\beta},\gamma_\nu;\ e_0^2,p,p']$，其中 S 和 $D_{\alpha\beta}$ 是自由传播子。

泛函 Λ_μ^* 是对数发散的，这就是说它依赖于作为参量的截断动量 Λ，当 $\Lambda\to\infty$ 时它象 $\ln\Lambda$ 那样发散。由于还有嵌入的图的发散，所以完全顶角函数 Λ_μ 的发散要厉害得多。

3. 电子传播子

完全的电子传播子可以直接从 Γ_μ 通过沃德-高桥恒等式[5]求得

$$[S'(p)]^{-1}=[S'(p_0)]^{-1}+(p-p_0)^\mu\Gamma_\mu(p,p_0). \tag{9.31}$$

右边实际上与 p_0 无关，但为了确定起见，我们取 p_0 为质壳(mass shell)上的电子的动量。"质量重整化"(mass renormalization)就是断言

$$[S'(p_0)]^{-1}=C(\not p_0-m), \tag{9.32}$$

其中 m 是电子的物理质量，C 是与截断有关的常数。

4. 光子传播子

自由光子传播子为

$$D_{\mu\nu}(k)=-\left[g_{\mu\nu}-(1-\lambda)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\frac{1}{k^2}, \tag{9.33}$$

式中 λ 是规范参量。把 $D_{\mu\nu}$ 看做有着闵可夫斯基度规的矩阵，则可以把 (9.33) 改写成矩阵形式

$$\mathbf{D}(k)=-[\mathbf{P}_T(k)+\lambda\mathbf{P}_L(k)]\frac{1}{k^2}, \tag{9.34}$$

其中 $\mathbf{P}_T$ 和 $\mathbf{P}_L$ 是由 (8.46) 式定义的横向和纵向投影算符。用矩阵符号给出的完全光子传播子为

$$\begin{aligned} i\mathbf{D}'(k) &= i\mathbf{D}(k)+i\mathbf{D}(k)i\mathbf{\Pi}(k)i\mathbf{D}(k)+\cdots \\ &= i\mathbf{D}(k)[1-i\mathbf{\Pi}(k)\mathbf{D}(k)]^{-1}, \end{aligned} \tag{9.35}$$

其中 $i\Pi_{\mu\nu}$ 是真空极化张量，它是把外线截掉的所有本征光子自能图的和。$\Pi_{\mu\nu}$ 的图形展开如图 9.4 所示。

$$ie_0^2(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu)\Pi(k^2) = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$

图 9.4 真空极化张量

规范不变性（或流守恒）要求

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0. \tag{9.36}$$

因此，$\Pi_{\mu\nu}$一定为下列形式[注b]

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)e_0^2\Pi(k^2). \tag{9.37}$$

由于根据数幂法，$\Pi_{\mu\nu}(k)$有二次骨架图发散，所以$\Pi(k^2)$只有对数骨架图发散，因为动量的二次方因子已经被分解出来了。用矩阵符号，（9.37）式变成

$$\mathbf{\Pi}(k) = \mathbf{P}_T(k)e_0^2k^2\Pi(k^2). \tag{9.38}$$

把它代入到（9.35）中，我们得到

$$i\mathbf{D}'(k) = i\mathbf{D}(k)\left[\frac{1}{1-e_0^2\Pi(k^2)}\mathbf{P}_T(k) + \lambda\mathbf{P}_L(k)\right]. \tag{9.39}$$

复原其指标，则记为

$$iD'_{\mu\nu}(k) = i\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)D'(k^2) + \frac{\lambda k_\mu k_\nu}{ik^2}, \tag{9.40}$$

其中 $$[iD'(k^2)]^{-1} = ik^2[1 - e_0^2\Pi(k^2)]. \tag{9.41}$$

这是一个规范不变的函数。（9.40）式的第二项虽依赖于规范，但它是与物理无关的。

为了处理交缠无穷大，我们定义辅助函数 $\mathbf{W}_\mu(\mathbf{k})$ 为

$$W_\mu(k) \equiv \frac{\partial}{\partial k^\mu}[iD'(k^2)]^{-1}. \tag{9.42}$$

[注 b] 计算 $\Pi_{\mu\nu}$过程中保证规范不变性的方法在 9.3 节讨论。

利用（9.40）式，我们有

$$W_\mu(k) = 2ik_\mu + ik_\mu T(k^2), \tag{9.43}$$

式中

$$T(k^2) = \frac{e_0^2}{k^2} k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu}[k^2 \Pi(k^2)]. \tag{9.44}$$

为了由 W_μ 重新求得 D'，利用下述公式

$$[iD'(k^2)]^{-1} = \int_0^1 dx k^\mu W_\mu(xk). \tag{9.45}$$

W_μ 的图形展开如图 9.5(a)所示。没有任何交缠无穷大存在。由这些图去掉嵌入图可以得到 T 的骨架图展开，但这时要去掉的不仅是所有嵌入的自能图和顶角图，还有那些嵌入的 W_μ。这个展开用 T^* 代表，画在图 9.5(b)上。图 9.6 给出了一个去掉 W_μ 的例子[注c]。现在我们可以写成

$$T(k^2) = T^*[S', D'_{\alpha\beta}, \Gamma_\nu, W_\mu; \ e_0^2, k^2]. \tag{9.46}$$

泛函 T^* 是对数发散的。

(a)$k_\mu T_\mu(k^2) = e_0^2 \frac{\partial}{\partial k_\mu}\Pi(k^2)$ 可由下面这些图求得

$+ O(e_0^8)$

(b)$k_\mu T_\mu^*(k^2)$ 可由下面这些图求得

$+ O(e_0^8)$

图 9.5 (a)辅助函数 $T(k^2)$ 的图。“×”线代表对外动量 k 的微商，照例只画在闭合圈的上半部。 (b)$T(k^2)$的骨架图展开，用 $T^*(k^2)$ 代表。

[注c]外动量 k 可以有不止一种方式连到一个圈上，这在定义骨架展开时带来不确定性。这个困难出现在至少包含有 3 个闭合电子圈的 W_μ，因此至少是 e_0^{14} 阶的。对于这个困难的讨论以及克服这一困难而给出的连接外动量的约定，见 T.T.Wu（吴大峻），*Phys. Rev*, 125, 1436(1962)。

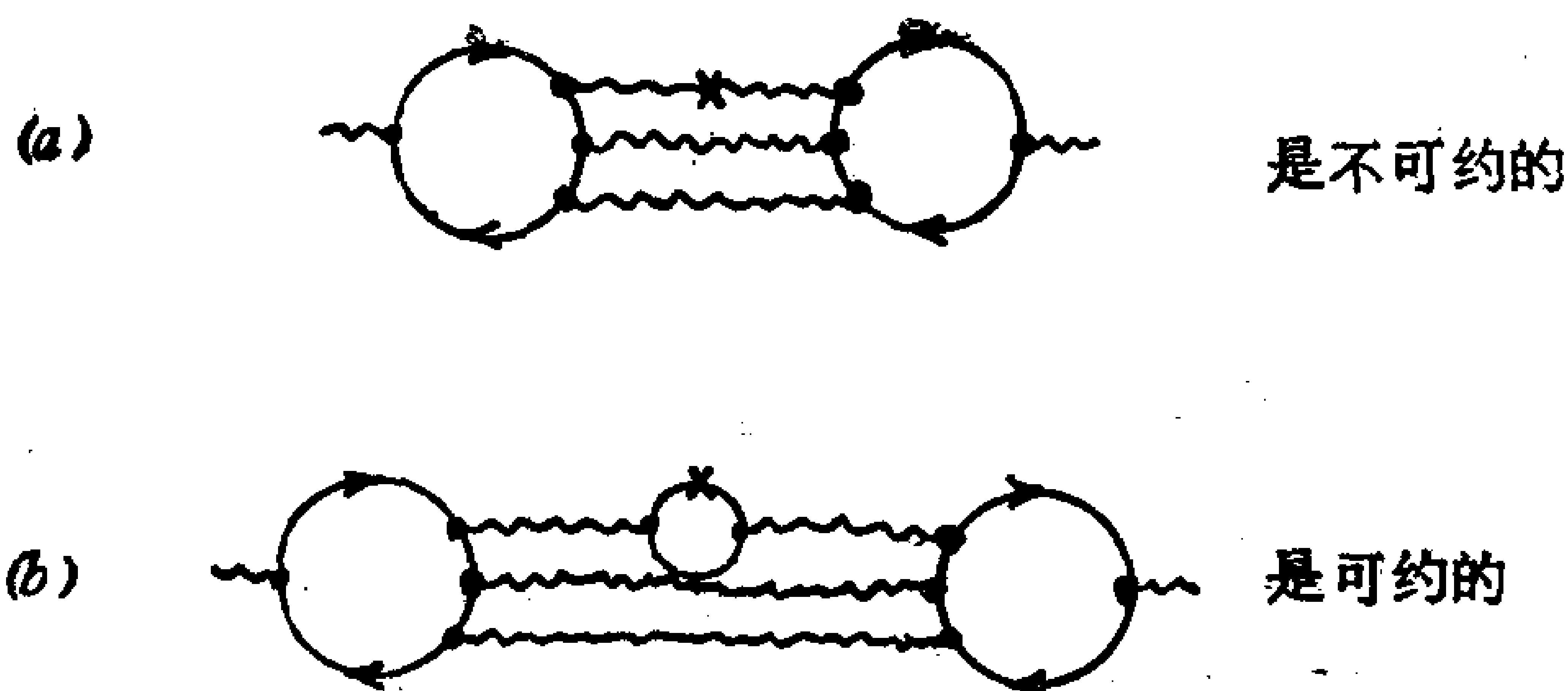


图 9.6 去掉 $T(k^2)$ 的嵌入图的实例

5. 相乘变换

定义 Λ_μ^* 的图都是偶数阶的，而一个 $2n$ 阶的图包含有 e_0^2、S、$D_{\alpha\beta}$ 和 γ_ν 的各种幂次的因子，如下式所示

$$\Lambda_{2n}^* \sim e_0^{2n} S^{2n} (D_{\alpha\beta})^n (\gamma_\nu)^{2n+1}. \tag{9.47}$$

在变换

$$\gamma_\nu \to a\gamma_\nu,\ D_{\alpha\beta}^* \to bD_{\alpha\beta}^*,\ S \to a^{-1}S, \tag{9.48}$$

之下

$$\Lambda_{2n}^* \to ab^n \Lambda_{2n}^*, \tag{9.49}$$

其中 a 和 b 都是任意数．于是

$$a\Lambda_\mu^*[S, D_{\alpha\beta}, \gamma_\nu;\ e_0^2, p, p'] = \Lambda_\mu^*[a^{-1}S, bD_{\alpha\beta}, a\gamma_\nu;\ b^{-1}e_0^2, p, p']. \tag{9.50}$$

对于泛函 T^*，一个 $2n$ 阶的图有下列结构

$$T_{2n}^* \sim e_0^{2n} S^{2n+\sigma} (D_{\alpha\beta})^{n-\sigma} (\gamma)^{2n+\sigma} (2ik_\mu)^{1-\sigma}, \tag{9.51}$$

其中 σ 是一个整数，对电子线的每一次微商使它增加 1，对光子线的每一次微商贡献一个 0。在(9.48) 式并补充上 $2ik_\mu \to 2ik_\mu/b$ 的变换下

$$T_{2n}^* \to b^{n-1} T_{2n}^*. \tag{9.52}$$

因此

$$b^{-1}T^*[S, D_{\alpha\beta}, \gamma_\nu, 2ik_\mu;\ e_0^2, k^2]$$

$$= T^{*}[a^{-1}S, bD_{\alpha\beta}, a\Gamma_{\nu}, b^{-1}2ik_{\mu}; \ b^{-1}e_0^2, k^2]. \tag{9.53}$$

6. 重整化

我们感兴趣的是把函数 S'，$D'_{\alpha\beta}$ 和 Γ_ν 重整化．这些函数满足如下的耦合泛函方程组

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu(p,p') &= \gamma_\mu + \Lambda_\mu^*[S', D'_{\alpha\beta}, \Gamma_\nu; \ e_0^2, p, p'], \\
W_\mu(k) &= 2ik_\mu + ik_\mu \Gamma^*[S', D'_{\alpha\beta}, \Gamma_\nu, W_\lambda; \ e_0^2, k^2], \\
[S'(p)]^{-1} &= [S'(p_0)]^{-1} + (p-p_0)^\mu \Gamma_\mu(p, p_0), \\
[D'(k^2)]^{-1} &= \int_0^1 dx k^\mu W_\mu(xk).
\end{aligned} \tag{9.54}$$

由于泛函 Λ_μ^* 和 T^* 都是发散的，所以这些方程组求得的解也是发散的函数。然而，因为它们只是对数发散，所以可以通过一次减除变成收敛的。

利用上述两个泛函的缩写 $\Lambda_\mu^*(p,p')$ 和 $T^*(k^2)$，我们定义两个有限的泛函[注d]

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}_\mu(p,p') &\equiv \Lambda_\mu^*(p,p') - [\Lambda_\mu^*(p_0,p_0)]_{\not p_0=m}, \\
\widetilde{T}(k^2) &\equiv T^*(k^2) - T^*(\mu^2),
\end{aligned} \tag{9.55}$$

其中，μ 是光子的任意的不变质量，p_0 是质壳上的电子的动量，因而 $p_0^2 = m^2$。附标 $\not p_0 = m$ 告诉我们要把 $\not p_0$ 一直换到右边，然后用 m 代替。于是，

$$[\Lambda_\mu^*(p_0,p_0)]_{\not p_0=m} = L\gamma_\mu, \tag{9.56}$$

其中 L 是 e_0^2 的一个幂级数，它有着对数发散的系数。同样的结论也适用于 $T_\mu^*(\mu^2)$。

我们现在定义，有限的重整化后的函数 $\widetilde{S}$、$\widetilde{D}_{\alpha\beta}$、$\widetilde{\Gamma}_\nu$ 和 $\widetilde{W}_\mu$ 为泛函方程组 (9.54) 式的解，它们是通过把 Λ_μ^*、T^* 分别用 $\widetilde{\Lambda}$ 和 $\widetilde{T}$ 代替，e_0^2 用一个适当的数 e^2 代替而得到的，即

[注 d]为了简单，我们取质壳动量 p_0 来对 Γ_μ 做减除．实际上，减除可以在任何动量去做，那时它的不变质量要看作除 μ 之外的额外的浮动(floating)重整化点．

$$\widetilde{\Gamma}_\mu(p,p') = \gamma_\mu + \widetilde{\Lambda}_\mu[\widetilde{S}, \widetilde{D}_{\alpha\beta}, \widetilde{\Gamma}_\nu; e^2, p, p'],$$

$$\widetilde{W}_\mu(k) = 2ik_\mu + ik_\mu \widetilde{T}[\widetilde{S}, \widetilde{D}_{\alpha\beta}, \widetilde{\Gamma}_\nu, \widetilde{W}_\lambda; e^2, k^2],$$

$$[\widetilde{S}(p)]^{-1} = [\widetilde{S}(p_0)]^{-1} + (p-p_0)^\mu \widetilde{\Gamma}_\mu(p,p_0), \tag{9.57}$$

$$[\widetilde{D}(k^2)]^{-1} = \int_0^1 dx k^\mu W_\mu(xk).$$

我们取$\widetilde{S}$的归一条件为

$$[\widetilde{S}(p_0)]^{-1} = \not{p}_0 - m. \tag{9.58}$$

则
$$[\widetilde{S}(p)]^{-1} = \not{p} - m + (p-p_0)^\mu \widetilde{\Lambda}_\mu(p,p_0), \tag{9.59}$$

它有下列性质

$$[(\not{p} - m)\widetilde{S}(p)]_{p=p_0} = 1. \tag{9.60}$$

$\widetilde{D}$的归一化条件为

$$[ik^2 \widetilde{D}(k^2)]_{k^2=\mu^2} = 1. \tag{9.61}$$

现在，我们来证明，重整化后的量正比于未重整的量。注意到$\widetilde{\Gamma}_\mu$可以改写成

$$\widetilde{\Gamma}_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^* - L\gamma_\mu = (1-L)\left(\gamma_\mu + \frac{1}{1-L}\Lambda_\mu^*\right)$$

$$= Z'\left\{\gamma_\mu + \frac{1}{Z'}\Lambda_\mu^*[\widetilde{S}, \widetilde{D}_{\alpha\beta}, \widetilde{\Gamma}_\nu; e^2, p, p']\right\}, \tag{9.62}$$

其中

$$Z' = 1 - L. \tag{9.63}$$

这个结果表明，减除等价于重新标度（re-scaling）。同样，我们可以写成

$$\widetilde{W}_\mu = 2ik_\mu + ik_\mu[T^*(k^2) - T^*(\mu^2)]$$

$$= Z\left\{2ik_\mu + \frac{1}{Z}ik_\mu T^*[\widetilde{S}, \widetilde{D}_{\alpha\beta}, \widetilde{\Gamma}_\nu, \widetilde{W}_\lambda; e^2, k^2]\right\}, \tag{9.64}$$

其中

$$Z = 1 - \frac{1}{2}T^*(\mu^2). \tag{9.65}$$

利用标度性质（9.50）和（9.53）式，可以得到

$$\frac{1}{Z'}\widetilde{\Gamma}_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^*\left[Z'\widetilde{S}, Z\widetilde{D}_{\alpha\beta}, \frac{1}{Z}\widetilde{\Gamma}_\nu; \frac{e^2}{Z}, p, p'\right],$$

$$\frac{1}{Z}\widetilde{W}_\mu = 2ik_\mu + ik_\mu T^*\left[Z'\widetilde{S}, Z\widetilde{D}_{\alpha\beta}, \frac{1}{Z'}\widetilde{\Gamma}_\nu, \frac{1}{Z}\widetilde{W}_\lambda; \frac{e^2}{Z}, k^2\right]. \tag{9.66}$$

于是，只要设

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{Z'}\widetilde{\Gamma}_\mu, \quad W_\mu = \frac{1}{Z}\widetilde{W}_\mu,$$
$$S' = Z'\widetilde{S}, \quad D'_{\mu\nu} = ZD_{\mu\nu}, \tag{9.67}$$
$$e_0^2 = \frac{e^2}{Z},$$

方程组（9.57）就可以化成（9.54）式。上述最后一条通称“电荷重整化”[注e]。

可以推测重整化后的量是有限的，因为它们满足有限的方程（9.57）。为证明它们确为有限的，必须证明（9.57）存在有限而又相互制约的解。这就是说，当把重整化后的嵌入图重新嵌入到重整化后的骨架图中时应该得到一个收敛的积分。温伯格[6]证明了这是正确的。

9.3 规范不变性和光子质量

正如早些时候我们曾指出的，规范不变性（或流守恒）要求真空极化张量 $\Pi_{\mu\nu}$ 的形式为

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\Pi(k^2). \tag{9.68}$$

这导致有着如下规范不变部分的光子传播子

[注e]应该强调指出的是，这个重整化方案是在微扰论基础上建立起来的，因而 Z 和 Z^{-1} 都必须看做是 α_0 的幂级数，其系数是发散的。如果象我们在实用时必须做的那样把这个幂级数在任何有限阶断掉，则 Z 和 Z^{-1} 都是发散的，尽管对所考虑的这一阶 $ZZ^{-1}=1$。一些形式上的考虑使人们相信 $0\leqslant Z<1$，而且很可能当 $\Lambda\to\infty$ 时 $Z\to 0$。〔G. Källen, Helv. *Phy*、*Acta*, 25, 417(1952)〕

$$iD'_{\mu\nu}(k)=\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{ik^2[1+\Pi(k^2)]}. \tag{9.69}$$

$k^2=0$ 处的极点相应于一个零质量的光子。仅当 $\Pi(k^2)$ 也在 $k^2=0$ 处产生一个极点时，这个极点才可能发生变化，而在微扰论中这是不可能发生的。于是，在微扰论中，光子的零质量是规范不变性自动得出的结果，因而不需要质量的重整化。

然而，在最低阶对 $\Pi_{\mu\nu}$ 所做的简单计算未能证明(9.68)式。而是发现 $\Pi_{\mu\nu}$ 的领头发散是二次的并且与 $g^{\mu\nu}$ 成正比。这意味着，可以简单地求得

$$iD'_{\mu\nu}(k)=\frac{g_{\mu\nu}}{i[k^2+R(k^2)]}, \tag{9.70}$$

其中 $R(k^2)$ 表现为二次发散的质量项。

这个困难的来源是由于流的奇异的特性引起的流守恒的破坏，这种特性是指

$$j^\mu(x)=ie\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{9.71}$$

包含着 $\psi(x)$ 与它在同一时空点的正则共轭量 $\psi^+(x)$ 的乘积.有几种修改这一计算的方法。

一种克服这一困难的方法称为“点分裂法”(point-splitting method)[7]。它把流重新定义为

$$j^\mu(x)=\lim_{\varepsilon\to 0} ie\,\overline{\psi}\left(x+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\gamma^\mu\psi\left(x-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\cdot\exp\left[ie\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}}dy^\mu A_\mu(y)\right]. \tag{9.72}$$

为了保持规范不变性，上式中指数因子是必需的。即使在 $\varepsilon\to 0$ 的极限时，这个因子也有非零的贡献，从而使问题得以解决。

更简单的修改方法是把朴素方法求得的 $\Pi_{\mu\nu}(k)$ 在 $k=0$ 附近展开成泰勒级数，然后减除足够多的领头项，直到求得所需的形式。实际上减除一次就够了。这种做法的正确性可证明如下。人

们证明了，规范不变性的破坏发生在 $\Pi_{\mu\nu}$ 的实部而不是虚部，因为后者描写物理过程而不是虚过程。于是，只要减除 k 的一个适当的、不含虚部的多项式，就可以恢复规范不变性。因此，实际做法是用 $\Pi_{\mu\nu}(k)-\Pi_{\mu\nu}(0)$ 代替朴素的 $\Pi_{\mu\nu}(k)$。人们可能注意到，二次发散的常数 $\Pi_{\mu\nu}(0)$ 可以被拉格朗日密度中 $CF^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ 形式的抵消项所抵消。这样，就可以通过重新标度 $F^{\mu\nu}$ 把它吸收掉。然而，这一手续纯粹是形式的，不能对上述做法给以任何较好的证明。

规范不变性的破坏甚至在有限的费曼图中也可能发生，例如最低级的光子-光子散射图。那时，相应于光子外动量的可能置换共有 4! 个图，把它们求和，得到一个收敛的积分（尽管每个单个的图都是对数发散的）。然而，这个积分不是规范不变的，因此必须用上述方法修正。

9.4 重整化群

1. 群不变量

量子电动力学中电荷重整化可以表示为下述关系

$$\widetilde{D}_{\mu\nu}=\frac{1}{Z(\mu^2)}D'_{\mu\nu},\qquad(9.73)$$

$$e^2(\mu^2)=e_0^2Z(\mu^2),$$

它对任意重整化点（减除点）μ^2 都成立。μ 的改变使 Z 改变，但不会使 $D'_{\mu\nu}$ 和 e_0^2 变化。所以，在 μ 变化下，$\widetilde{D}_{\mu\nu}$ 和 $e^2(\mu^2)$ 只改变一个相乘的常数因子。显然，改变重整化点的运算构成乘法群，即“重整化群”。

我们注意到：

——未重整化的函数依赖于 $\{p,m,\alpha_0,\Lambda\}$；

——重整化以后的函数依赖于 $\{p,m,\alpha(\mu^2),\mu\}$，其中，$p$ 代

表外动量；Λ 代表动量截断，μ 代表重整化点，而 α_0 和 $\alpha(\mu^2)$ 分别代表裸的和跑动的耦合常数：

$$\alpha_0 = e_0^2/4\pi, \ \alpha(\mu^2) = e^2(\mu^2)/4\pi. \tag{9.74}$$

精细结构常数的实验值为

$$\alpha \equiv \alpha(0) \cong \frac{1}{137}. \tag{9.75}$$

我们看到，在重整化后的函数中，原来对 α_0 和 Λ 的依赖关系换成了对 $\alpha(\mu^2)$ 和 μ 的依赖关系。

重整化常数 Z 是无量纲的，它不依赖于外动量

$$Z = Z\left(\frac{m^2}{\mu^2}, \ \frac{\mu^2}{\Lambda^2}, \ \alpha_0\right). \tag{9.76}$$

传播子的规范不变部分可以表示为

$$\begin{aligned} D'_{\mu\nu} &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{d'}{ik^2}, \\ \widetilde{D}_{\mu\nu} &= \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{d}{ik^2}, \end{aligned} \tag{9.77}$$

式中 d' 和 d 都是无量纲的标量函数

$$\begin{aligned} d' &= d'\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}, \ \frac{m^2}{\Lambda^2}, \ \alpha_0\right), \\ d &= d\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \ \frac{m^2}{\mu^2}, \ \alpha(\mu^2)\right), \end{aligned} \tag{9.78}$$

根据（9.61）式

$$d\left(1, \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha(\mu^2)\right) = 1. \tag{9.79}$$

利用所有上述论证，（9.73）式变成

$$\begin{aligned} d\left(\frac{k^2}{\mu^2}, \ \frac{m^2}{\mu^2}, \alpha(\mu^2)\right) &= Z^{-1}\left(\frac{m^2}{\mu^2}, \ \frac{\mu^2}{\Lambda^2}, \ \alpha_0\right)d'\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}, \frac{m^2}{\Lambda^2}, \ \alpha_0\right), \\ \alpha(\mu^2) &= \alpha_0 Z\left(\frac{m^2}{\mu^2}, \ \frac{\mu^2}{\Lambda^2}, \ \alpha_0\right). \end{aligned} \tag{9.80}$$

假定α_0以这样一种方式依赖于$\frac{m^2}{\Lambda^2}$，即它使上式在$\Lambda\to\infty$的极限时仍成立，则

$$\alpha(\mu^2)d\left(\frac{k^2}{\mu^2},\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha(\mu^2)\right)=\alpha_0 d'\left(\frac{k^2}{\Lambda^2},\ \frac{m^2}{\Lambda^2},\ \alpha_0\right),\qquad(9.81)$$

这表明，左边与μ^2无关，因此是重整化群不变量。这一不变性显然可以重新表示为

$$\alpha(\mu^2)d\left(\frac{k^2}{\mu^2},\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha(\mu^2)\right)=\alpha(\nu^2)d\left(\frac{k^2}{\nu^2},\ \frac{m^2}{\nu^2},\alpha(\nu^2)\right),\qquad(9.82)$$

其中，μ和ν是两个任意的重整化点。

2．跑动耦合常数

标准的重整化后，传播子d_c相应于选取$\mu=0$，即

$$\alpha d_c\left(\frac{k^2}{m^2},\alpha\right)\equiv\lim_{\mu\to 0}\alpha(\mu^2)d\left(\frac{k^2}{\mu^2},\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha(\mu^2)\right).\qquad(9.83)$$

它的归一条件为

$$d_c(0,\ \alpha)=1.\qquad(9.84)$$

由于（9.83）式右边实际上与μ无关，所以对所有的μ，我们都可以写成

$$\alpha d_c\left(\frac{k^2}{m^2},\alpha\right)=\alpha(\mu^2)d\left(\frac{k^2}{\mu^2},\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha(\mu^2)\right).\qquad(9.85)$$

设$\mu^2=k^2$且利用（9.79）式，我们求得

$$\alpha(k^2)=\alpha d_c\left(\frac{k^2}{m^2},\alpha\right).\qquad(9.86)$$

利用这个结果，我们可以把（9.85）式改写成似乎是跑动耦合常数的泛函方程的样子

$$\alpha(k^2)=\alpha(\mu^2)d\left(\frac{k^2}{\mu^2},\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha(\mu^2)\right).\qquad(9.87)$$

然而，这个方程本身没有什么内容。

为看到这一点，取一个这样的重整化点$\mu_0(\alpha)$，使

$$\alpha(\mu_0^2)=1. \tag{9.88}$$

由于 μ_0^2 有质量平方的量纲，所以它的形式必定是

$$\mu_0^2(\alpha)=m^2/\phi(\alpha). \tag{9.89}$$

利用此式，（9.87）式简化为

$$\alpha(k^2)=d\left(\frac{k^2}{m^2}\phi(\alpha),\phi(\alpha),\ 1\right), \tag{9.90}$$

它没有对 $\alpha(k^2)$ 的泛函形式加上任何限制。然而，（9.87）式可以做为其它输入量的媒介，利用该式我们还可以得到关于 $\alpha(k^2)$ 渐近行为的一些知识。

在（9.55）式中我们注意到，当 $\mu^2\to\Lambda^2\to\infty$ 的极限时，减除项 $T^*(\mu^2)$ 必定为零。这就是说，在那种极限下，不存在任何减除。因此，在 $\mu^2\to\infty$ 极限下，重新得到裸的精细结构常数：

$$\alpha(\mu^2)\xrightarrow[|\mu^2|\to\infty]{}\alpha_0. \tag{9.91}$$

我们对 μ^2 取了绝对值，这是以 $\mu^2=\infty$ 时 $\alpha(\mu^2)$ 不存在任何本性奇点（essential singularity）的假定为依据的。

3. 盖尔曼-骆函数[8]（Gell-Mann-Low function）

当外动量和重整化点都变得很大时，可以把重整化后传播子中的电子质量略去，这似乎是有些道理的。于是，我们假定下列极限存在

$$\lim_{m\to 0} d\left(\frac{k^2}{\mu^2},\ \frac{m^2}{\mu^2},\alpha(\mu^2)\right)=\mathrm{f}\left(\frac{k^2}{\mu^2},\alpha(\mu^2)\right),$$

$$\mathrm{f}(1,\ \alpha(\mu^2))=1. \tag{9.92}$$

这一假定，用微扰论计算到 α^2 阶已经得到了证明[9]。注意，我们不能在函数 $d_c\left(\frac{k^2}{m^2},\alpha\right)$ 中设 $m=0$，因为它的重整化点是 $\mu=0$，所以需要 m 为动量设置一个标度。

利用（9.92）式，可以把恒等式(9.87)变成如下泛函方程：

$$\alpha(k^2)=\alpha(\mu^2)f\left(\frac{k^2}{\mu^2},\ \alpha(\mu^2)\right)$$

$$(k^2/m\gg 1,\ \mu^2/m^2\gg 1)\ . \tag{9.93}$$

仍取 $\mu=\mu_0(\alpha)$ (见 (9.88) 和 (9.89)), 可得

$$\alpha(k^2)=f\left(\frac{k^2}{m^2}\phi(\alpha),1\right)\equiv F\left(\frac{k^2}{m^2}\phi(\alpha)\right)\quad (k^2\gg m^2)\ . \tag{9.94}$$

这表明，在 $k^2\gg m^2$ 时，$\alpha(k^2)$的泛函形式变成与精细结构常数无关，m只是用来建立一个标度。

我们可以利用 (9.94) 式，把 $\alpha(k^2)$的最低级计算推广如下。由 (9.18) 式我们得到

$$\frac{1}{\alpha(k^2)}=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}\right)+O(\alpha). \tag{9.95}$$

取

$$\phi(\alpha)=e^{-3\pi/\alpha}, \tag{9.96}$$

可以把括号中的项写成 $F\left(\phi(\alpha)\frac{k^2}{m^2}\right)$的形式。于是在所计算的这一级近似下，(9.95) 与 (9.94) 是一致的。由于 $O(\alpha)$项必须只是 $\phi(\alpha)\frac{k^2}{m^2}$的函数，所以把它展开成 α 的幂级数应有如下形式

$$c_1\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}\right)^{-1}+c_2\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}\right)^{-2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\alpha^n\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}\right)^{-n}.$$

因此，对 $k^2\gg m^2$

$$\left[d_e\left(\frac{k^2}{m^2},\alpha\right)\right]^{-1}=1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\alpha^{n+1}\left(1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}\right)^{-n}. \tag{9.97}$$

这样，不用再进一步计算，我们就可以断言，所有“领头对数”

(leading logarithms) 项之和给出

$$d_e\left(\frac{k^2}{m^2},\alpha\right)=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}}. \quad (9.98)\text{[注 f]}$$

我们现在叙述一种从 (9.93) 式得到信息的更有效的方法。首先，把它改写成

$$\alpha(x)=\alpha(y)f\left(\frac{x}{y},\ \alpha(y)\right). \quad (9.99)$$

在固定 y 的情况下，把上式两边对 x 微商，然后令 $y=x$，则得到

$$x\frac{d}{dx}\alpha(x)=\beta(\alpha(x)), \quad (9.100)$$

其中

$$\beta(\alpha)\equiv\alpha\left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}\right]_{x=1} \quad (9.101)$$

称为“盖尔曼-骆函数” (GL 函数)。(9.100) 的解是

$$\ln\frac{x}{y}=\int_{\alpha(y)}^{\alpha(x)}\frac{dz}{\beta(z)}. \quad (9.102)$$

$\beta(z)$的泰勒展开可以用微扰论求得，其结果为（对量子电动力学）

$$\beta(z)=\frac{z^2}{3\pi}\left(1+\frac{3}{4\pi}z+\cdots\right). \quad (9.103)$$

上式中的第一项很容易从 (9.18) 式求得。利用 $\beta(z)$的泰勒级数的第一项，并假定可以取 $y=m^2$（在所计算的这一级，这是可以证明的），则 (9.98) 的结果可以直接由 (9.102) 求得。

[注 f]在 $\frac{k^2}{m^2}=\exp(3\pi/\alpha)$处出现的极点称为“兰道鬼”，因为兰道对于这样的极点所暗示的该理论的致命弱点感到震惊。[L. D. Landau, in *Nils Bohr and the Development of Physics*, Ed. W. Pauli (Mc Graw-Hill, new York 1955]。按现在的观点看，人们对这个公式感兴趣仅在于把它与量子色动力学里相应的公式做比较时。在那里式中的负号要代之以正号（渐近自由）。

4. 固定点（fixed point）

引入参量 t，把重整化点写成

$$\mu^2=\mu_0^2+e^t \qquad (-\infty<t<\infty)\,, \tag{9.104}$$

其中 μ_0 为已知的参考点。跑动耦合常数将用 $\alpha(t)$ 表示。(9.102) 式则变成

$$t=\int_{\alpha(0)}^{\alpha(t)}\frac{d\alpha}{\beta(\alpha)}. \tag{9.105}$$

当 $|t|\to\infty$ 时，上述积分一定是发散的。这意味着 $\alpha(t)$ 或者是发散的，或者趋向于 GL 函数 $\beta(\alpha)$ 的有限的零点。对后一种可能性我们做进一步的分析。

$\beta(\alpha)$ 的有限的零点称为固定点。按照在这个零点的邻域 $\beta(\alpha)$ 是递减的（$\downarrow$）还是递增的（$\uparrow$）函数，这个固定点分别称为紫外（UV）或红外（IR）固定点：

$$\begin{aligned}&\text{固定点：}\ \beta(\alpha_0)=0,\\&\text{UV 固定点：在}\ \alpha=\alpha_0\ \text{附近}\ \beta(\alpha)\downarrow,\\&\text{IR 固定点：在}\ \alpha=\alpha_0\ \text{附近}\ \beta(\alpha)\uparrow.\end{aligned} \tag{9.106}$$

图 9.7 画出了固定点的一些例子。采用上述术语的理由是

$$\begin{aligned}&\alpha(t)\xrightarrow[\pi\to\infty]{}\text{UV 固定点},\\&\alpha(t)\xrightarrow[\pi\to-\infty]{}\text{IR 固定点}.\end{aligned} \tag{9.107}$$

请读者通过考察图 9.7，并结合（9.105）式，来证明上述说法是正确的。在图 9.7 中我们用箭头标明了随着 $t\to\infty$，$\alpha(t)$ 运动的方向，它是与出发点 $\alpha(0)$ 有关的。

图 9.7(a) 画出了对于量子电动力学，$\beta(\alpha)$ 的可能形状。我们唯一可以肯定的性质是：坐标原点是一个红外固定点，在它的邻域，通常的微扰论是适用的。由于当 $t\to\infty$ 时，$\alpha(t)$ 并不趋于该点，所以我们不能希望靠微扰论来找到 $\alpha(t)$ 的正确的渐近行为。把微扰论朴素地外推表明 $\alpha(t)\to\infty$。但是，另外一种可能

性是$\beta(\alpha)$有另一个零点$\alpha_0 \neq 0$，它是紫外固定点。在那种情况下，$\alpha(t) \to \alpha_0$，它意味着α_0是裸的精细结构常数。于是，如果量子电动力学是一个有限的理论，α_0一定是GL函数的一个根。迄今为止，任何勤勉的探索都没有能找到这个可能的根。阿德勒(Adler)[10]曾指出，如果它存在，则不可能是任何有限阶的根。另外一些人则证明根本没有根[11]。

图9.7(*b*)表明了象量子色动力学这样的渐近自由理论中$\beta(\alpha)$的可能形状。它的特点是：坐标原点是一个紫外固定点。在这种情况下，微扰论适用于$t \to \infty$的极限，而这正是与电子-核子深度非弹性散射有关的范围[12]。然而，对于$t \to -\infty$，微扰论不适用，这相当于假定会发生夸克禁闭现象的长程极限。

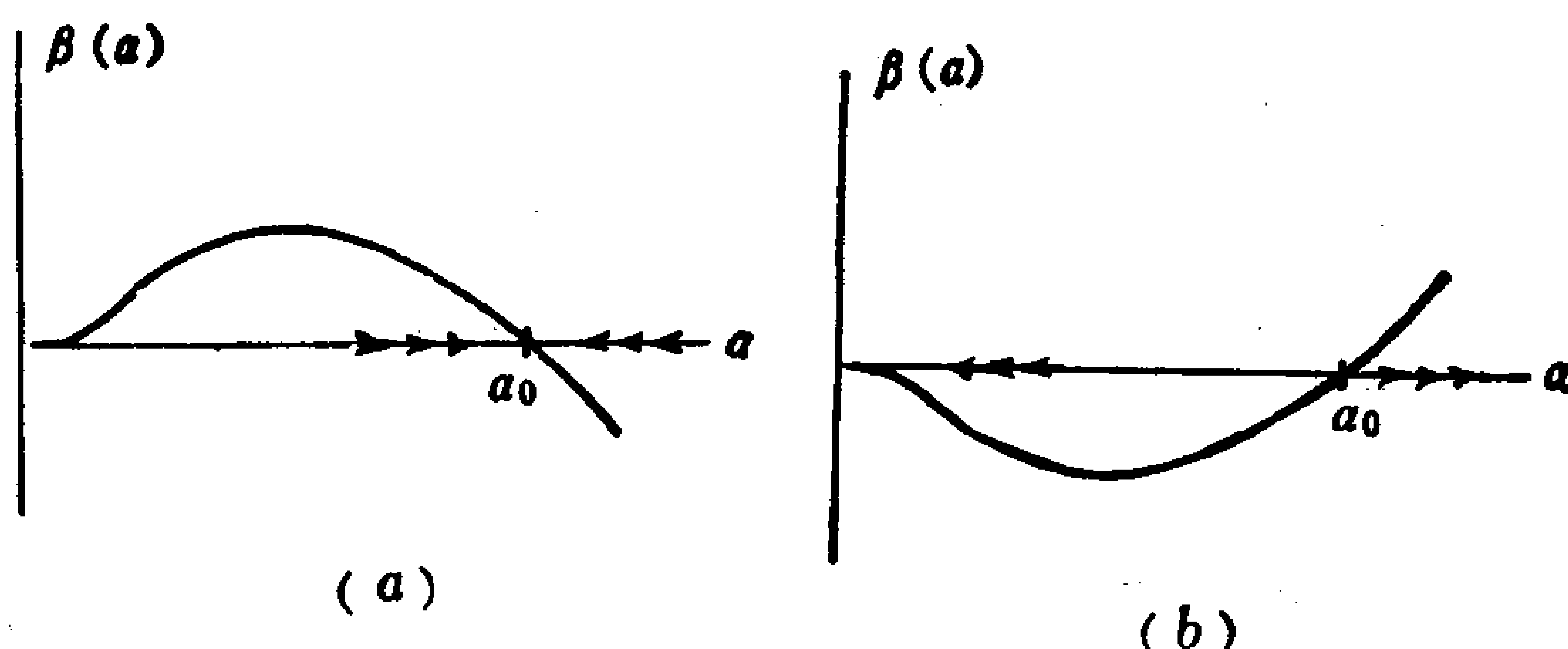


图9.7 GL函数的一些例子。(*a*)非渐近自由理论；(*b*)渐近自由理论

9.5 凯兰-塞曼吉克方程

把一个可重整化场论真地进行重整化，也就是说导出未重整的和重整化后的函数之间的关系，总是一件很难的工作。但是如果这些关系已知了，那么常常可以不必涉及重整化手续的细节而导出跑动耦合常数和GL函数。凯兰(Callan)和塞曼吉克

(Šymanzik)[13]把这一想法付诸实现[注 g]。

考虑只有一个裸的无量纲耦合常数 α_0 的可重整理论。n 点连通格林函数 G'_n 与重整化后的 G_n 之间的关系为

$$G'_n(p;\ \Lambda,\alpha_0)=Z^n\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right)G_n(p;\ \mu,\ \alpha),\qquad (9.108)$$

式中 Z 是正的常数，p 代表所有的外动量，Λ 为截断动量，μ 是重整化点。更普遍的，函数 Z^n 还要补充上一些其它的可能的重整化常数。为了简单，我们把它们略去了。我们把所有的质量都取作零，这意味着我们所考虑的是渐近区域，在那里所有外动量都很大，而动量的标度靠 μ 来建立。

重整化以后的耦合常数 α 依赖于 Λ、μ 和 α_0，由于它是无量纲的，所以必定有下列形式

$$\alpha=\alpha\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right).\qquad (9.109)$$

当 $\Lambda\to\infty$ 时，假定它趋向于一个只是 μ 的函数，即跑动耦合常数 $\alpha(\mu)$。(9.108) 式的全部内容就在于：选择各函数的宗量和断言当 $\Lambda\to\infty$ 时，G_n 和 α 趋于有限的极限，而 G'_n、Z 和 α_0 可以是发散的。

我们注意到 (9.108) 式的右边应该与 μ 无关，因此

$$\frac{d}{d\mu}\left[Z^n\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right)G_n(p;\mu,\alpha)\right]=0.\qquad (9.110)$$

算出这个微商，我们得到

$$n\mu\frac{\partial\ln Z}{\partial\mu}G_n+\mu\frac{\partial G_n}{\partial\mu}+\mu\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\frac{\partial G_n}{\partial\alpha}=0,\qquad (9.111)$$

其中所有的偏微商是在被微商的函数的其它宗量保持固定时取

[注 g]历史上，凯兰-塞曼吉克方程是由考虑微扰论中形式上的标度不变性遭到破坏而建立起来的。做为参考，除了文献[13]之外，还可以见 S. Coleman and R. Jackiw, *Annals of Phys.* 67, 552(1971); J. C. Collins, A. Duncan, and S. O. Joglekar, *Phys. Rev.* D16 438(1977).

的．定义两个无量纲的函数 β 和 γ 为

$$\beta(\alpha(x))\equiv\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\alpha\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right), \tag{9.112}$$

$$\gamma(\mu)\equiv\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right),$$

其中，$\beta(\alpha(\mu))$是 GL 函数，而$\gamma(\mu)$称为"反常量纲"（anomalous dimension）（它和通常把Z 用 Z^{-1} 代替的处理方法得到的结果差一个负号）〔注 h〕．我们要强调指出的是 β 必须表示成 $\alpha(\mu)$的函数．利用这些定义，可以把（9.111）写成

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}+n\gamma(\mu)\right]G_n(p;\mu,\alpha)=0. \tag{9.113}$$

这就是凯兰-塞曼吉克方程（CS 方程）．

现在我们来考虑格林函数的无量纲的比 F，从而把因子 Z 约掉．于是，F 就是重整化群的不变量．一个简单的例子是，对某些固定的 n 有

$$F\left(\frac{p}{\mu},\alpha\right)=\frac{G_n(p;\mu,\alpha)}{G_n(\mu;\mu,\alpha)}, \tag{9.114}$$

其中 $G_n(\mu;\mu,\alpha)$ 是把 $G_n(p;\mu,\alpha)$ 中的所有的外动量取为一个共同的动量，它的不变质量平方为 μ^2．这时，易见，CS 方程简化为

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]F\left(\frac{p}{\mu},\alpha\right)=0. \tag{9.115}$$

方便的做法是把参量 μ 和跑动耦合常数 α 都用参量表示

$$\mu(t)\equiv\mu_0e^t,\qquad \alpha(t)\equiv\alpha(\mu(t)), \tag{9.116}$$

其中 μ_0 是某个固定的参考点．那时，F 的不变性可以表示为

$$\frac{d}{dt}F\left(\frac{p}{\mu(t)},\alpha(t)\right)=0. \tag{9.117}$$

〔注 h〕为了简单，在这一节我们用 μ 而不用 μ^2 做为独立变量．这不会影响跑动耦合常数，但会使 $\beta(\alpha)$与前节结果差一个因子 2．

算出这个微商，我们得到

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)F\left(\frac{p}{\mu},\ \alpha\right)=0. \tag{9.118}$$

把它与（9.115）式比较可得

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}=\beta(\alpha(t)), \tag{9.119}$$

它的解为

$$\int_{\alpha(0)}^{\alpha(t)}\frac{d\alpha}{\beta(\alpha)}=t. \tag{9.120}$$

由于F与t无关，所以我们有

$$F\left(\frac{p}{\mu(t)},\alpha(t)\right)=F\left(\frac{p}{\mu(0)},\ \alpha(0)\right). \tag{9.121}$$

设$p=\mu(t)$，即设所有的外动量都等于其不变质量平方为$\mu^2(t)$的共同的动量．那时我们有

$$F(1,\alpha(t))=F\left(\frac{\mu(t)}{\mu(0)},\ \alpha(0)\right). \tag{9.122}$$

右边实际上是一个常数，因此可以归一为1，于是

$$F(1,\alpha(t))=1. \tag{9.123}$$

这可以看做是$\alpha(t)$的定义．

我们把（9.121）式简单地改写成

$$F\left(\frac{p}{\mu(t)},\alpha(t)\right)=F\left(\frac{e^tp}{e^t\mu(0)},\ \alpha(0)\right)$$

$$=F\left(\frac{e^tp}{\mu(t)},\ \alpha(0)\right). \tag{9.124}$$

设$p=k\mu(t)/\mu(0)$，然后再把k换成p，我们得到

$$F\left(\frac{e^tp}{\mu(0)},\ \alpha(0)\right)=F\left(\frac{p}{\mu(0)},\alpha(t)\right). \tag{9.125}$$

这说明，F的所有外动量改变一个共同因子，等价于耦合常数的变化．

对于格林函数G_n，改变重整化点的效果由CS方程（9.113）决定，该方程可以改写成

$$\left[\frac{d}{dt}+n\gamma(t)\right]G_n(p;\mu(t),\alpha(t))=0, \tag{9.126}$$

其中$\gamma(t)\equiv\gamma(\mu(t))$。只要注意到，如果把$\mu$和$\alpha$都看作$t$的函数，则有

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{d}{dt}, \tag{9.127}$$

那时，(9.126) 式就不难得到。该式的解是

$$G_n(p;\mu(t),\alpha(t))=e^{-nD(t)}G_n(p;\mu(0),\alpha(0)),$$
$$D(t)\equiv\int_0^t dt'\gamma(t'). \tag{9.128}$$

把p再用e^tp代替

$$G_n(e^tp;\mu(t),\alpha(t))=e^{-nD(t)}G_n(e^tp;\mu(0),\alpha(0)), \tag{9.129}$$

左边可以写成：

$$G_n(e^tp;e^t\mu(0),\ \alpha(t)).$$

我们注意到，所有有着质量量纲的宗量都乘上了一个共同的因子e^t。若G_n本身的量纲为(质量)^d，则

$$G_n(e^tp;e^t\mu(0),\alpha(0))=e^{td}G_n(p;\mu(0),\alpha(0)). \tag{9.130}$$

(回忆一下关于G_n不包含内在的质量参数的假定。) 让该式与 (9.129) 式的右边相等，则得到

$$G_n(e^tp;\mu(0),\alpha(0))=e^{td+nD(t)}G_n(p;\mu(0),\alpha(0)). \tag{9.131}$$

这个公式是 (9.125) 式的推广。请注意，总的的标度因子不仅是由量纲分析所预期的朴素的e^{td}，而且还包含了一个额外的因子$\exp\left[n\int dt\gamma(t)\right]$ (因此，命名为"反常量纲")。后者的产生是由于标度变化还使重整化点改变，而在这一变化下G_n不是不变量。

9.6 例：零质量ϕ^4理论

作为利用 (9.112) 式计算 GL 函数的例子，我们就零质量

ϕ^4 理论具体算到最低级近似。拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-a_0\phi^4. \tag{9.132}$$

没有任何质量参量，因而不存在内在的标度。重整化后的荷由四点格林函数定义，它的二级近似下的费曼图如图 9.8 所示

$$G_4'(p;\Lambda,a_0)=-ia_0+\frac{1}{2}(ia_0)^2[I(p_1+p_2)+ +I(p_2+p_3)+I(p_3+p_1)], \tag{9.133}$$

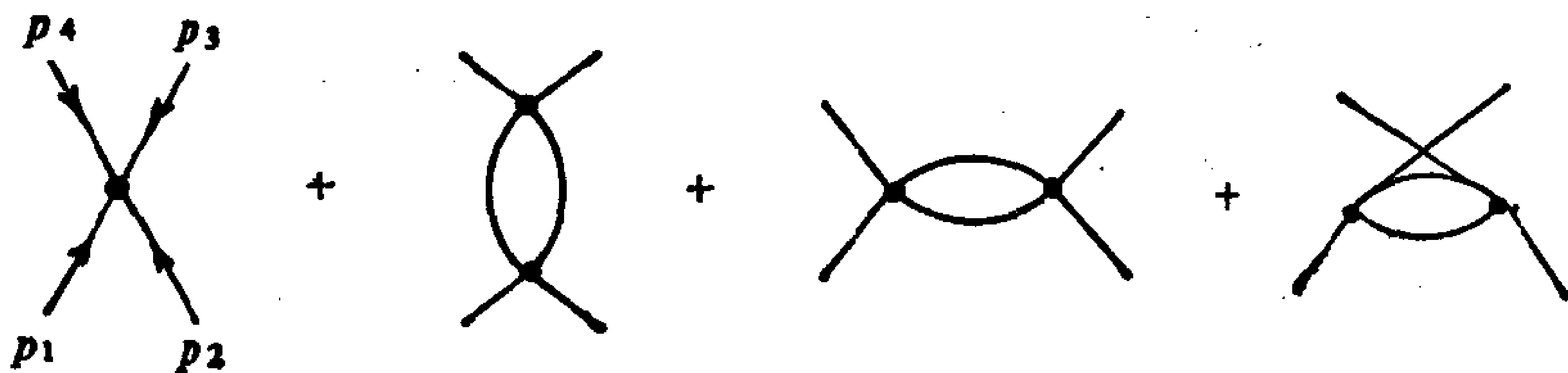


图 9.8 ϕ^4 理论中四点函数的费曼图

其中第二项的$\frac{1}{2}$因子来自于图的对称数，而

$$I(p)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2+i\varepsilon)[(k+p)^2+i\varepsilon]}. \tag{9.134}$$

这个积分是对数发散的，把它转到欧几里得动量空间且在动量 Λ 处截断。利用这种程序我们求得

$$I(p)=\frac{i}{16\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{-p^2+i\varepsilon}, \tag{9.135}$$

然后把它再转回闵可夫斯基空间。由此，我们求得

$$\begin{aligned}G_4'(p;\Lambda,a_0)&=-ia_0+\frac{ia_0^2}{32\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{s}+\ln\frac{\Lambda^2}{t}+\ln\frac{\Lambda^2}{u}\right),\\ s&=-(p_1+p_2)^2+i\varepsilon,\\ t&=-(p_2+p_3)^2+i\varepsilon,\\ u&=-(p_3+p_1)^2+i\varepsilon.\end{aligned} \tag{9.136}$$

重整化后的耦合常数 a 定义为

$$\alpha\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right)\equiv iG_4'(\mu;\Lambda,\alpha_0),\tag{9.137}$$

其中 G' 的宗量 μ 意味着 $p_1^2=p_2^2=p_3^2=p_4^2=-\mu^2$（注意我们是在一个欧几里得点做重整化）。利用（9.136）我们得到

$$\alpha\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right)=\alpha_0-\frac{3\alpha_0^2}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2},\tag{9.138}$$

由该式，再利用（9.112）式，则得到 GL 函数

$$\beta(\alpha)=\frac{3\alpha^2}{16\pi^2}.\tag{9.139}$$

由于这是一个正的量，所以这个理论没有渐近自由。利用

$$\int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)}\frac{d\alpha}{\beta(\alpha)}=\ln\frac{\mu}{\mu_0},\tag{9.140}$$

我们可以求得跑动耦合常数 $\alpha(\mu)$，即得到

$$\frac{1}{\alpha(\mu)}=\frac{1}{\alpha(\mu_0)}-\frac{3}{32\pi^2}\ln\frac{\mu^2}{\mu_0^2}.\tag{9.141}$$

把它与（9.138）式对照，我们得到预期的结果

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\alpha(\Lambda)=\alpha_0.\tag{9.142}$$

重整化常数为

$$Z\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right)=\alpha\left(\frac{\Lambda}{\mu},\ \alpha_0\right)\Big/\alpha_0\doteq 1+\frac{3\alpha_0}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}.\tag{9.143}$$

根据（9.112）式，由上式可得

$$\gamma(\mu)=-\frac{3}{16\pi}\alpha(\mu).\tag{9.144}$$

到所计算的这一级近似，G_4' 可以写成如下形式

$$[iG_4']^{-1}=\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{32\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{s}+\ln\frac{\Lambda^2}{t}+\ln\frac{\Lambda^2}{u}\right).\tag{9.145}$$

把由（9.141）式在 $\mu_0=\Lambda$ 时求得的 $1/\alpha_0$ 代入上式，则

$$\begin{aligned}[iG_4']^{-1}&=\frac{1}{\alpha(\mu)}+\frac{1}{32\pi^2}\left(\ln\frac{\mu^2}{s}+\ln\frac{\mu^2}{t}+\ln\frac{\mu^2}{u}\right)\\&\equiv[iG_4(p;\mu,\alpha(\mu))]^{-1}.\end{aligned}\tag{9.146}$$

因为 $Z=1+O(\alpha)$，所以在这一级近似下，不出现 Z 因子。

参考文献

[1] 关于费曼规则请看 J.D.Bjorken and S. D.Drell, *Relativistic Quautum Fields* (Mc Graw-Hill, New York, 1965), Appendix B.

[2] J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of photons and Electrons* (Addison-Wesley publishing company, 1955) p. 194, eq. (9—65); N. N. Bogolubov and D.V.Shickov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Intercience, NewYork, 1959), p. 296, Eq. (24.35).

[3] 这里描述的是戴逊和沃德方法: F. J. Dyson, *phys. Rev,* 75 486, 1736 (1949); J.C.Ward, *Proc.Phys. Soc.* (London), A 64, 54(1951).

[4] N. N. Bogolubov and O. Parasuik, *Acta Math.*, 97, 227 (1957); K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* 2. 301(1966).

[5] J. C. Ward, *Phys. Rev.*, 78, 1824(1950); Y. Takahashi, *N. Cimento,* 6 370(1957).

[6] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, 118, 838(1960).

[7] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, 87 664(1951); K. Johnson, in *Particles and Field Theory,* eds. S. Deser and K.W.Ford (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965).

[8] M. Gell-mann and F. E. Low, *Phys. Rev.*, 95 1300(1954).

[9] 这一点在 R. Jost and J. M. Luttinger, *Hebr. Phys. Acta,* 23 20(1950)一文中含蓄地被证明了.

[10] S. L. Adler, *Phys. Rev.*, D5 3021(1972).

[11] S. L. Adler, C. G. Callan, D. J. Gross, and R.Jackiw, *Phys. Rev.*, D6, 2982(1972); N. Christ, *Phys. Rev.*, D9, 946(1973); M. Baker and K. Johnson, *Physica,* 964, 120 (1979).

[12] H. D. Politzer, *Phys. Reports,* 14, 129(1974); A. H. Mueller, *Phys. Reports,* 73 239(1981).

第十章　等效势方法

10.1　对称性自发破缺

本章将讨论存在对称性自发破缺（spontaneous symmetry breaking）时的重整化。为了加深对这个问题的理解，应当指出，对称性自发破缺纯粹是一个理论概念，它与实验毫无关系。例如，希格斯场的真空期待值就不是一个直接可观测量。它只能在一个理论模型的框架内从观测数据间接地推论出来。不存在任何一种实验方法，可以使我们鉴别质量是起源于“力学质量项”（mechanical mass term）还是对称性自发破缺。

那么，人们可能会觉得奇怪的是我们究竟为什么要使用这个概念。正如我们在温伯格-萨拉姆模型的讨论中所了解的，其理由就在于，它使我们得以构造一个有质量矢量玻色子的可重整理论，用这个理论可以进行实际的计算。于是，我们应当对关于对称性自发破缺的重整化问题有所了解，而借助于“等效势”（effective potential）可以最方便地做到这一点。

为了引进这一技巧，我们将讨论一个自耦合标量场的数学实例。与物理学有关的是当这些标量场同其它场，比如规范场相耦合的情况。我们将描述后者的一个简单例子，但是不准备给出一个真实理论的重整化的完整处理[1]。

10.2　等效作用量[2]

考虑一个实标量场，其拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - V(\phi(x)),$$

$$V(\phi) = \frac{\alpha_0}{4!}\phi^4 - \frac{m_0^2}{4}\phi^2. \tag{10.1}$$

真空场的经典值是使 $V(\phi)$取最小值时的 ρ_0，而量子场的真空期待值$\langle\phi\rangle$不一定与它相同。$\langle\phi\rangle$的定义为

$$\langle\phi\rangle = \lim_{J\to 0}\frac{\langle 0^+ | \phi_{op} | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J}, \tag{10.2}$$

式中的一些符号与 7.3 节的符号相同。

让我们回忆生成泛函 $W[J]$的定义

$$\exp\frac{i}{\hbar}W[J] = \mathscr{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\{S[\phi] + (J,\phi)\},$$

$$S[\phi] = \int d^4x\mathscr{L},\ \ (J,\ \phi) = \int d^4xJ(x)\phi(x). \tag{10.3}$$

为了清楚起见，在（10.3）式中保留了 $\hbar$ 因子，而在本书其它地方都取 $\hbar = c = 1$。通过展开成 $\hbar$ 的幂级数，我们可以得到费曼图的圈图展开。若把所有的 $\hbar$ 和 c 都复原，且保持$\mathscr{L}(x)$与(10.1)给出的形式完全相同，我们就会发现 $\hbar c\alpha$ 是该理论中唯一的无量纲参量。于是圈图展开实际上就是 $\hbar c\alpha$ 的幂展开，只不过把无穷多个费曼图换了一种方式求和而已。

有外源 $J(x)$存在时，场的真空期待值为

$$\phi_c(x) \equiv \frac{\langle 0^+ | \phi_{op}(x) | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+ | 0^- \rangle_J} = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}. \tag{10.4}$$

$J\to 0$ 时，$\phi_c(x)$的极限就是真空期待值$\langle\phi\rangle$。这里，ϕ_c 由外源函数 $J(x)$确定。现在我们要问：什么样的源函数将产生给定的函数 $\phi_c(x)$呢？为了回答这一点，我们把问题重新表达成用 ϕ_c 而不是 J 做独立变量的更方便的形式。

通过勒让德（Legendre）变换定义"等效作用量"$\Gamma[\phi_c]$为

$$\Gamma[\phi_c] \equiv W[J] - (J,\phi_c), \tag{10.5}$$

式中的 J，要通过求解（10.4）而用 ϕ_c 把它消掉。我们把 $\Gamma[\phi_c]$ 叫做等效作用量是因为它是经典场 ϕ_c 的泛函，因此很象 $S[\phi]$。注意到

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}=\frac{\delta W[J]}{\delta\phi_c(x)}-J(x)-\int d^4y\,\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\phi_c(y),$$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta\phi_c(x)}=\int d^4y\,\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\,\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}=\int d^4y\,\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\phi_c(y).$$

把后一个式子代入前一个式子中，则求得

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}=-J(x). \tag{10.6}$$

若设 $J=0$，则根据平移不变性，ϕ_c 将变成常数。因此 $\langle\phi\rangle$ 就是方程

$$\left.\frac{d\Gamma[\phi_c]}{d\phi_c}\right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle}=0 \tag{10.7}$$

的根。

我们还记得，$W[J]$ 是连通格林函数的生成泛函。现在我们来证明，$\Gamma[\phi_c]$ 是本征的、或单粒子不可约的（1-PI）格林函数的生成泛函。我们总可以把 $\Gamma[\phi_c]$ 展开成 ϕ_c 的幂级数如下：

$$\Gamma[\phi_c]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\Gamma_n(x_1,\cdots,x_n)\,\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n). \tag{10.8}$$

现在我们来证明，Γ_n 是 n 点 1-PI 格林函数，即是所有的有着 n 条外腿的连通的 1-PI 费曼图（砍掉所有外部传播子）之和。

考虑如下的量

$$\mathcal{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{a}\{\Gamma[\phi]+(J,\phi)\}, \tag{10.9}$$

当 $a\to0$ 时，积分的主要贡献来自于被积表达式在鞍点所取的值，鞍点出现在 $\phi=\phi_c$ 处，因为（10.6）正是鞍点条件。于是

$$\mathcal{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{a}\{\Gamma[\phi]+(J,\phi)\}\xrightarrow[a\to0]{}\mathcal{N}\exp\frac{i}{a}$$

$$\cdot\{\Gamma[\phi_c]+(J,\phi_c)\} \tag{10.10}$$

根据（10.5）式，上式等同于

$$\exp\frac{i}{a}W[J]\xrightarrow[a\to 0]{}\mathcal{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{a}\{\Gamma[\phi]+(J,\phi)\}. \tag{10.11}$$

在 $a\to 0$ 的极限情况下，上式右边是作用量为 $\Gamma[\phi]$ 的一个新的理论中所有树图之和。根据（10.8）的定义，这些树图之一的顶角就是某个 Γ_n。这一点如图 10.1(*a*) 所示。另一方面，根据定义，$W[J]$是原来理论的所有的连通格林函数之和，而一个连通的格林函数能分割成一些 1-PI 部分，如图 10.1(*b*) 所示。因此 Γ_n 就是原来理论的 1-PI 格林函数。

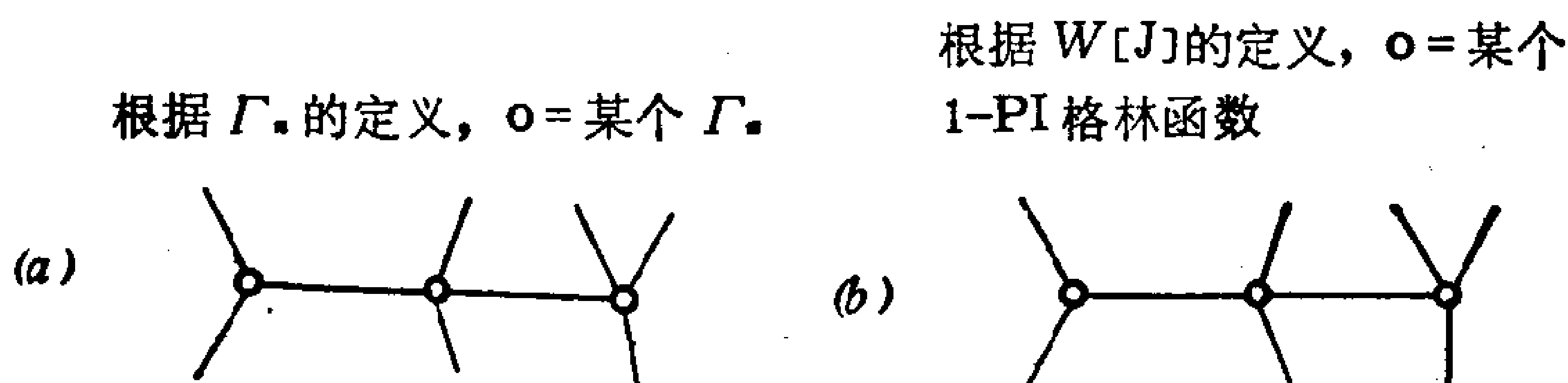


图 10.1　证明等效作用量生成 1-PI 格林函数用的辅助图

10.3　等　效　势

我们还可以把 $\Gamma[\phi_c]$用 ϕ_c 及其微商展开如下：

$$\Gamma[\phi_c]=\int d^4x\left[-U(\phi_c(x))+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_c(x)\partial^\mu\phi_c(x)\right.$$

$$\left.\cdot Z(\phi_c(x))+\cdots\right]. \tag{10.12}$$

函数 U 称为“等效势”。它可以由（10.12）式设 $\phi_c(x)=\rho$（常数）而求得。这时（10.12）中除第一项外所有的项都等于零，因此我们有

$$\Gamma[\phi]=-\Omega U(\rho), \tag{10.13}$$

其中 Ω 为总的时空体积。

设 ϕ_c 和 Γ_n 的傅氏变换为

$$\widetilde{\phi}_c(k) = \int d^4x e^{ik\cdot x}\phi_c(x),$$

$$\widetilde{\Gamma}_n(k_1\cdots k_n)\delta^4(k_1+\cdots+k_n)$$
$$= \int d^4x_1\cdots d^4x_n \Gamma_n(x_1,\cdots,x_n)\exp(ik_1\cdot x_1+\cdots+ik_n\cdot x_n). \tag{10.14}$$

利用它们，可以把（10.8）改写成

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}\delta^4(k_1+\cdots+k_n)$$
$$\cdot\widetilde{\Gamma}_n(k_1\cdots k_n)\widetilde{\phi}_c(k_1)\cdots\widetilde{\phi}_c(k_n). \tag{10.15}$$

设 $\phi_c(x) = \rho$（常数），$\widetilde{\phi}_c(k) = \Omega\rho$, (10.16)

其中 Ω 是总的时空体积

$$\Omega = (2\pi)^4\delta^4(0), \tag{10.17}$$

则

$$\Gamma[\rho] = \Omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\widetilde{\Gamma}_n(0), \tag{10.18}$$

其中 $\widetilde{\Gamma}_n(0) \equiv \widetilde{\Gamma}_n(0,0,\cdots,0).$ (10.19)

把（10.18）与（10.13）比较，我们求得

$$U(\rho) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{n!}\widetilde{\Gamma}_n(0). \tag{10.20}$$

于是我们可以证明

$$-\left.\frac{d^nU(\rho)}{d\rho^n}\right|_{\rho=0} = \widetilde{\Gamma}_n(0). \tag{10.21}$$

要记住，Γ_n 是用 $\phi(x)$ 场定义的。当有对称性自发破缺时，更合适的是取移动后的场

$$\eta(x) = \phi(x) - \langle\phi\rangle. \tag{10.22}$$

用 $\eta(x)$ 定义的 1-PI 格林函数 $\Gamma_n^{(\eta)}$ 是 Γ_n 的线性组合，它可以由（10.20）式的移动以后的形式求得

$$U(\rho-\langle\phi\rangle)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\rho-\langle\phi\rangle]^n}{n!}\Gamma_n^{(s)}(0). \qquad (10.23)$$

一些物理上有用的量可以直接由等效势求得：

$$\left[\frac{dU(\rho)}{d\rho}\right]_{\rho=\langle\phi\rangle}=0\ （\langle\phi\rangle满足的条件），$$

$$\left[\frac{d^2U(\rho)}{d\rho^2}\right]_{\rho=\langle\phi\rangle}=m^2\ （重整化后的质量），$$

$$-\left[\frac{d^4U(\rho)}{d\rho^4}\right]_{\rho=\langle\phi\rangle}=\alpha\ （重整化后的耦合常数）.$$

m^2 和 α 都是重整化理论的自由参量．由于我们必须要求 $m^2\geqslant0$，所以前两个条件就意味着 ϕ 是使 $U(\rho)$ 取极小值的点，正和 ρ_0 是 $V(\rho)$ 取极小值的点一样．下面我们将在单圈近以下把 $U(\rho)$ 明确地计算出来．

10.4 圈图展开[3]

$W[J]$ 的圈图展开(loop expansion) 到单圈级可以从(10.3)式用鞍点积分法求得．鞍点位于 $\phi=\phi_0$ 处，而 ϕ_0 满足

$$\left.\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi=\phi_0}=-J(x). \qquad (10.25)$$

注意到 $\phi_0(x)$ 是 x 的函数，同时又是 J 的泛函．当 $J\to0$ 时，$\phi_0(x)$ 变成经典运动方程的解．

把 $S[\phi]$ 在 ϕ_0 附近展开，我们得到

$$\begin{aligned}S[\phi+\phi_0]=&S[\phi_0]+\int d^4x\phi(x)\{\delta S[\phi]/\delta\phi(x)\}_{\phi=\phi_0}\\&+\frac{1}{2}\int d^4xd^4y\phi(x)\phi(y)\{\delta^2S[\phi]/\delta\phi(x)\delta\phi(y)\}_{\phi=\phi_0}\\&+S_2[\phi,\phi_0],\end{aligned} \qquad (10.26)$$

其中 S_2 包括所有更高次的项．引入一个传播子函数 $\Delta[\phi_0]$，它

是 ϕ_0 的一个泛函，其定义为

$$\langle x \mid i\Delta^{-1}[\phi_0] \mid y\rangle \equiv \left.\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\right|_{\phi=\phi_0}. \tag{10.27}$$

那么

$$S[\phi+\phi_0] = S[\phi_0] - (J,\phi) + \frac{1}{2}(\phi, i\Delta^{-1}[\phi_0]\phi) + S_2[\phi,\phi_0],$$

现在，我们可以得到

$$\begin{aligned}\exp\frac{i}{\hbar}W[J] &= \mathscr{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\{S[\phi+\phi_0]+(\phi+\phi_0,J)\}\\ &= \mathscr{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{\hbar}\Big\{S[\phi_0]+\frac{1}{2}(\phi, i\Delta^{-1}[\phi_0]\phi)\\ &\quad + S_2[\phi,\phi_0]+(\phi_0,J)\Big\}\\ &= \exp\frac{i}{\hbar}\{S[\phi_0]+(\phi_0,J)\}\cdot\Big\{\mathscr{N}\int(D\phi)\exp\frac{i}{2\hbar}\\ &\quad \cdot(\phi, i\Delta^{-1}[\phi_0]\phi)\Big\}\cdot\Big\langle\exp\frac{i}{\hbar}S_2\Big\rangle,\end{aligned} \tag{10.29}$$

其中〈 〉代表对于权重函数（weighting function）为

$$\exp\frac{i}{2\hbar}(\phi, i\Delta^{-1}[\phi_0]\phi)$$

的泛函平均值。（10.29）式中间的那个花括号内的因子等于 $\{\det i\Delta^{-1}[\phi_0]\}^{-\frac{1}{2}}$。于是

$$W[J] = S[\phi_0] + (\phi_0, J) + \frac{i\hbar}{2}\ln\det\{i\Delta^{-1}[\phi_0]\} + W_2[J], \tag{10.30}$$

其中

$$W_2[J] = -i\hbar\ln\Big\langle\exp\frac{i}{\hbar}S_2\Big\rangle. \tag{10.31}$$

可以证明，W_2 是一个比 $\hbar$ 的一级量更高级的量。为此，通过设 $\phi=\hbar^{\frac{1}{2}}\tilde{\phi}$ 来重新标度 ϕ。那时

$$\hbar^{-1}S_2[\phi,\phi_0] = \hbar^{-1}\phi\phi\phi[\delta^3 S/\delta\phi\delta\phi\delta\phi]_{\phi=\phi_0}+\cdots$$

$$=\hbar^{\frac{1}{2}}\tilde{\phi}\tilde{\phi}\tilde{\phi}[\delta^3 S/\delta\phi\delta\phi\delta\phi]_{\phi=\phi_0}+\cdots.$$

于是

$$W_2=-i\hbar\ln[1+O(\hbar^{\frac{1}{2}})]\sim O(\hbar^{\frac{3}{2}}).\qquad(10.33)$$

事实上，$W_2\sim O(\hbar^2)$，因为我们从 7.7 节得知，可以把 $W[J]$ 作圈图展开成为 $\hbar$ 的幂级数，所以并不存在分数的幂次。这样一来，(10.30)中的前两项代表树图近似(tree approximation)，而第三项就是完整的单圈修正 (one loop correction)。

把 (10.30) 代到 (10.5) 式将得到等效作用量 $\Gamma[\phi_c]$ 的圈图展开。然而，我们还必须先把 $S[\phi_0]$ 表示为 ϕ_c 的泛函。易见，在树图近似中 $\phi_c=\phi_0$，因此 $(\phi_c-\phi_0)\sim O(\hbar)$：

$$\phi_c(x)=\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\equiv\phi_0(x)+\phi_1(x),$$

$$\phi_1(x)\sim O(\hbar).\qquad(10.34)$$

现在，我们把 $S[\phi_0]$ 展开成下列形式：

$$S[\phi_0]=S[\phi_c-\phi_1]$$

$$=S[\phi_c]-\int d^4x\phi_1(x)\{\delta S[\phi]/\delta\phi(x)\}_{\phi=\phi_0}+O(\hbar^2)\qquad(10.35)$$

$$=S[\phi_c]+(\phi_1,J)+O(\hbar^2),$$

其中，最后一步我们用到 (10.25) 式，把最后得到的这个关系式代入 (10.30) 式，然后再把得到的结果代入 (10.5) 式，我们得到

$$\Gamma[\phi_c]=S[\phi_c]+(\phi_c,J)+\frac{i\hbar}{2}\ln\det\{i\Delta^{-1}[\phi_c]\}+O(\hbar^2).\qquad(10.36)$$

现在，设 $J=0$，则 $\phi_c(x)=\rho$，因而

$$\Gamma[\rho]=S[\rho]+\frac{i\hbar}{2}\ln\det\{i\Delta^{-1}[\rho]\}+O(\hbar^2),\qquad(10.37)$$

其中 ρ 是一个常数。另一方面，我们知道

$$\Gamma[\rho] = -\Omega U(\rho),$$

$$S[\rho] = \left[\int d^4x \mathscr{L}(x)\right]_{\phi=\rho} = -\Omega V(\rho). \tag{10.38}$$

因此

$$U(\rho) = V(\rho) - \frac{i\hbar}{2}\ln\det\{i\Delta^{-1}[\rho]\} + O(\hbar^2). \tag{10.39}$$

为了计算 (10.39) 中的第二项，我们注意到

$$\ln\det\{i\Delta^{-1}[\rho]\} = \mathrm{Tr}\ln\{i\Delta^{-1}[\rho]\}$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ln\langle k|\, i\Delta^{-1}[\rho]\, |k\rangle. \tag{10.40}$$

因此

$$U(\rho) = V(\rho) - \frac{i\hbar}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Omega^{-1}\ln\langle k|\, i\Delta^{-1}[\rho]\, |k\rangle + O(\hbar^2). \tag{10.41}$$

10.5 单圈等效势

在拉格朗日密度中取 $\phi(x) = \rho + \phi_1(x)$，其中 ρ 是一个常数．则

$$S[\phi] = \int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - V(\phi_1+\rho)\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\int d^4x\phi_1[\Box^2 + V''(\rho)]\phi_1 + \cdots, \tag{10.42}$$

式中，省略了 ϕ_1 的三次方以上的高次项．根据 (10.27) 式，我们有

$$\langle x|\, i\Delta^{-1}[\rho]|\, y\rangle = \left.\frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi_1(x)\delta\phi_2(y)}\right|_{\phi_1=0}$$
$$= -[\Box^2 + V''(\rho)]\delta^4(x-y). \tag{10.43}$$

因此

$$\Omega^{-1}\langle k|\, i\Delta^{-1}(\rho)|\, k\rangle = k^2 - V''(\rho). \tag{10.44}$$

把该式代入（10.41），我们得到

$$U(\rho)=V(\rho)+\frac{\hbar}{2}\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\ln[k_E^2+V''(\rho)]+O(\hbar^2),\tag{10.45}$$

这里，我们已经转到了欧氏动量空间。上述积分是发散的。在 $k_E^2=\Lambda^2$ 处把它截断，则

$$\int d^4k_E\ln(k_E^2+V'')=\pi^2\left[\Lambda^4\left(\ln\Lambda-\frac{1}{4}\right)+\Lambda^2V''+\frac{1}{2}(V'')^2\left(\ln\frac{V''}{\Lambda^2}-\frac{1}{2}\right)\right]+O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right).\tag{10.46}$$

利用这个结果，我们得到：

$$U(\rho)=V(\rho)+\hbar V_1(\rho)+O(\hbar^2),\tag{10.47}$$

其中

$$V_1(\rho)=\frac{\Lambda^2}{32\pi^2}V''(\rho)+\frac{[V''(\rho)]^2}{64\pi^2}\left[-\frac{1}{2}+\ln\frac{V''(\rho)}{\Lambda^2}\right].\tag{10.48}$$

我们省略了量级为 $\Lambda^4\ln\Lambda$ 的一个常数，但这不会对 $U(\rho)$ 的极小值的位置有任何影响。

为了把 $V_1(\rho)$ 分离成发散部分和收敛部分，我们必须引入一个任意的标度参量 μ，使得

$$\ln\frac{V''}{\Lambda^2}=\ln\frac{V''}{\mu^2}+\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2}.$$

利用这个结果，我们得到

$$V_1(\rho)=\frac{1}{32\pi^2}\left[\Lambda^2V''-\frac{1}{2}(V'')^2\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right]+\frac{(V'')^2}{64\pi^2}\left(-\frac{1}{2}+\ln\frac{V''}{\mu^2}\right).\tag{10.49}$$

第一项是发散的，而第二项是收敛的。

10.6 重整化

1. 一般方案

$V_1(\rho)$中的发散必须通过重整化消除。为了使其成为可能，这些发散项必须和拉格朗日密度中已有的项有相同的形式，以便可以把它们吸收进去。换句话说，只有当消除发散所需的抵消项与拉格朗日密度中已有的项形式相同时，该理论才是可以重整化的。

对于一个一般的n次多项式$V(\rho)$，$V''(\rho)$一定是$n-2$次多项式，故$V_1(\rho)$的发散部分是$2n-4$次多项式。于是，如果$2n-4\leqslant n$，或$n\leqslant 4$，这个理论就是可以重整的。我们选取的$V(\rho)$是满足这个条件的。

为了写出抵消项的显示式，把$\mathscr{L}(x)$中的参量改写成下列形式：

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 + \delta\alpha, \\ m_0^2 &= m_1^2 + \delta m^2, \end{aligned} \tag{10.50}$$

其中$\delta\alpha$和δm^2在微扰论中可以是发散的，但要求α_1和m_1^2都是有限的参量。因为$\delta\alpha$和δm^2只在量子理论中出现，所以为了做圈图展开，我们假定

$$\delta\alpha \sim \delta m^2 \sim O(\hbar). \tag{10.51}$$

于是，我们可以写成

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(x) &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi) + \frac{\delta m^2}{4}\phi^2 - \frac{\delta\alpha}{4!}\phi^4, \\ V(\phi) &= \frac{\alpha_1}{4!}\phi^4 - \frac{m_1^2}{4}\phi^2. \end{aligned} \tag{10.52}$$

在相应的经典理论中，场的真空值为

$$\rho_0 = m_1\left(\frac{3}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10.53}$$

$\mathscr{L}(x)$ 中的最后两项都是抵消项[注a]。由于它们都是 $\hbar$ 量级的，可以简单地把它们加到单圈等效势中。于是，我们得到

$$U(\rho)=V(\rho)+\hbar V_1(\rho)+\frac{\delta\alpha}{4!}\rho^4-\frac{\delta m^2}{4}\rho^2. \tag{10.54}$$

为了抵消 $V_1(\rho)$ 的发散部分，选 $\delta\alpha$ 和 δm^2 为如下形式

$$\delta\alpha=\frac{3\alpha_1^2\hbar}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2},$$

$$\delta m^2=\frac{\alpha_1\hbar}{32\pi^2}\left(\Lambda^2+\frac{m_1^2}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right). \tag{10.55}$$

上面的两个式子的右边当然不是完全确定的，它们都可以加上一些有限的项，但这些有限项总可以吸收到标度参量 μ 中。这样，我们就得到

$$U(\rho)=V(\rho)+\frac{\hbar}{64\pi^2}[V''(\rho)]^2\left[-\frac{1}{2}+\ln\frac{V''(\rho)}{\mu^2}\right]. \tag{10.56}$$

它在 $\rho=\langle\phi\rangle$ 处取极小值，在那里

$$U'(\langle\phi\rangle)=0. \tag{10.57}$$

令

$$\langle\phi\rangle=\rho_0+\rho_1, \tag{10.58}$$

其中 ρ_0 由（10.53）式定义。重整化后的质量 m 和重整化后的耦合常数 α 分别定义为：

$$m^2\equiv U''(\rho_0+\rho_1),\qquad \alpha\equiv U''''(\rho_0+\rho_1). \tag{10.59}$$

做为参考，我们给出 U 的各级微商公式如下：

$$U'=V'+kV''V'''\ln(V''/\mu^2),$$

[注a] 我们没有考虑波函数的重整化，由于这种重整化，动能项被 $\frac{1}{2}Z\,\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ 代替。这提供了为使总传播子的整体归一条件成为有限所必需的抵消项。被这个抵消项抵消的图来自于本征自能图与动量相关的部分，至少包含双圈。因此 $Z=1+O(\hbar^2)$。

$$U'' = V'' + k\{[(V''')^2 + \alpha_1 V'']\ln(V''/\mu^2) + (V''')^2\},$$

$$U''' = V''' + k\{3\alpha_1 V'''\ln(V''/\mu^2) + [(V''')^3/V''] + 3\alpha_1 V'''\}, \tag{10.60}$$

$$U'''' = \alpha_1 + \alpha_1^2\{3\ln(V''/\mu^2) + (6\alpha_1\rho^2/V'') - [\alpha_1^2\rho^4/(V'')^2] + 3\},$$

其中

$$k \equiv \hbar/32\pi^2, \tag{10.61}$$

而

$$V' = \frac{\alpha_1}{6}\rho^3 - \frac{m_1^2}{2}, \qquad V'' = \frac{\alpha_1}{2}\rho^2 - \frac{m_1^2}{2},$$

$$V''' = \alpha_1\rho, \qquad V'''' = \alpha_1. \tag{10.62}$$

2. 有质量的情况

假定 $m_1>0$。那时可以假设 $\rho_1 \ll \rho_0$。若只保留 ρ_1/ρ_0 的一级项，我们得到（取 $\hbar=1$）

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = -\frac{\alpha_1}{32\pi^2}\ln\frac{m_1^2}{\mu^2} + O(\alpha_1^2). \tag{10.63}$$

利用这个结果，我们求得

$$\langle\phi\rangle = m_1\left(\frac{3}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\alpha_1}{32\pi^2}\ln\frac{m_1^2}{\mu^2} + O(\alpha_1^2)\right],$$

$$m^2 = m_1^2\left[1 + \frac{3\alpha_1}{32\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3}\ln\frac{m_1^2}{\mu^2}\right) + O(\alpha_1^2)\right], \tag{10.64}$$

$$\alpha = \alpha_1\left[1 + \frac{3\alpha_1}{32\pi^2}\left(1 + \ln\frac{m_1^2}{\mu^2}\right) + O(\alpha_1^2)\right].$$

3. 无质量情况

对于 $m_1=0$ 的情况，没有内在的质量标度，因此，必须在

一个浮动的重整化点 μ 定义耦合常数. 由 (10.60) 式我们发现

$$U''''(\rho)=\alpha+\frac{\alpha^2\hbar}{64\pi^2}\left(11+3\ln\frac{\alpha\rho^2}{2\mu^2}\right). \tag{10.65}$$

由下式定义一个新的标度参量 μ_0

$$U''''(\mu_0)\equiv\alpha. \tag{10.66}$$

其值由下式给出

$$\ln\frac{\alpha\mu_0^2}{2\mu^2}=-\frac{11}{3}. \tag{10.67}$$

定义跑动耦合常数为

$$\alpha(\rho)\equiv U''''(\rho)=\alpha+\frac{3\hbar\alpha^2}{32\pi^2}\ln\frac{\rho^2}{\mu_0^2}. \tag{10.68}$$

于是, 参量 α 就是跑动耦合常数在 $\rho=\mu_0$ 处取的值. 把 (10.68) 改写成

$$\frac{1}{\alpha(\rho)}=\frac{1}{\alpha(\mu_0)}-\frac{3}{32\pi^2}\ln\frac{\rho^2}{\mu_0^2}, \tag{10.69}$$

我们看到这正是 (9.141) 式, 只不过是用不同的方法重新导出的.

在无质量情况下, 真正感兴趣的问题是, 是否可能发生对称性自发破缺. 换句话说, $\langle\phi\rangle$能取纯粹由辐射修正产生的非零值吗? 如果答案是肯定的, 我们就会有一个动力学质量生成模型, 这是物理上感兴趣的.

由 (10.60) 式我们得到

$$U'(\rho)=\frac{\rho^4}{4!}\left[\alpha+\frac{3\hbar\alpha^2}{32\pi^2}\left(\ln\frac{\rho^2}{\mu^2}+常数\right)\right]. \tag{10.70}$$

它似乎有一个根$\langle\phi\rangle$, 满足

$$\hbar\alpha\ln\frac{\langle\phi\rangle^2}{\mu^2}=-\frac{32\pi^2}{3}. \tag{10.71}$$

然而, 这要求在圈图展开中的一个量级为 $\hbar$ 的量与量级为 1 的一个量相等. 因此, 这个根必须丢弃, 因为它是在所用的近似的适

用范围之外的。

使（10.71）式不成立的技术上的原因在于（10.70）中的两项分别为 α 和 α^2 量级的，因此，在该式适用范围内这两项不可能彼此抵消。然而，假如我们能够把模型修改一下，把 α 和 α^2 用两个独立的耦合常数代替，那时就会出现相抵消，因而也就会导致由辐射修正引起的对称性自发破缺。这样一个模型的确可以找到，最简单的例子就是"无质量"的标量电动力学。

10.7 维度蜕变

科尔曼（Caleman）和温伯格（E. Weinberg[4]）证明，"无质量"的标量电动力学在重整化后，标量场具有任意的真空平均值 $\langle\phi\rangle$，哪怕经典场对应的 $\langle\phi\rangle=0$。其后果是非常吸引人的：$\langle\phi\rangle$ 表现为一个自发产生的物理质量的标度，标量粒子和矢量粒子都可得到与 $\langle\phi\rangle$ 成正比的动力学质量。这样一来，象无质量标量电动力学这种东西实际上并不存在。他们把这一现象称为"维度蜕变"（dimensional transmution）。

我们简略地介绍一下科尔曼-温伯格结果的推导。拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+[(\partial_\mu-ieA_\mu)\phi^*][(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi]-\frac{\lambda_0}{6}(\phi^*\phi)^2. \tag{10.72}$$

为了使标量-标量散射振幅重整化，自耦合 λ_0 是必需的。采用么正规范我们立即可以把 ϕ 的相因子去掉，因此当与我们的目的无关时，不再考虑这个相因子。这样，我们就可以用下列拉格朗日密度

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}e^2A_\mu A^\mu\phi^2+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{\lambda_0}{4!}\phi^4. \tag{10.73}$$

为了便于与（10.1）式对比，上式中每一个ϕ都乘上了一个$2^{-\frac{1}{2}}$因子．矢量场要满足下列辅助条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{10.74}$$

我们取e为重整化后的耦合常数，而略去使其重整化需引入的抵消项．耦合常数λ_0是裸耦合常数，有待于重整化．

该理论的作用量是

$$S[A,\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}A^\mu(\Box^2 + e^2\phi^2)A_\mu - \frac{1}{2}\phi\Box^2\phi - \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4\right]. \tag{10.75}$$

我们将用该理论的路径积分把矢量场积掉求得只有ϕ的作用量

$$\exp iS[\phi] = \mathscr{N}\int (DA)\,\delta[\partial_\mu A^\mu]\exp iS[A,\phi]. \tag{10.76}$$

矢量场的每一个分量积分后都贡献一个因子

$$\left[\det(\Box^2 + e^2\phi^2)\right]^{-\frac{1}{2}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\ln\det(\Box^2 + e^2\phi^2)\right]$$
$$= \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(\Box^2 + e^2\phi^2)\right]. \tag{10.77}$$

由于有三个独立分量，所以我们有

$$S[\phi] = -\int d^4x\left(\frac{1}{2}\phi\Box^2\phi + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4\right) - \frac{3}{2}\mathrm{Tr}\ln(\Box^2 + e^2\phi^2). \tag{10.78}$$

于是，到λ_0的最低次项，ϕ的等效势为

$$U(\rho) = \frac{\lambda_0}{4!}\rho^4 + \frac{3}{2}\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\ln(k_E^2 + e^2\rho^2). \tag{10.79}$$

第二项相应于所有这样的单圈图之和，这些图有外部ϕ线，但只有矢量玻色子闭合圈．标量场的各阶圈图都被看做高级效应．

现在我们可以照搬（10.45）式以后的做法．由（10.56）直接得到重整化后的等效势（在一个可加常数范围内）为

$$U(\rho)=\rho^4\left[\frac{\lambda}{4!}+\frac{3e^4}{64\pi^2}\left(-\frac{1}{2}+\ln\frac{e^2\rho^2}{\mu^2}\right)\right], \tag{10.80}$$

其中λ是重整化点μ处的跑动耦合常数。尽管e^4是单圈结果，而λ项是零圈结果，但这两项却是可以相比较的，因为λ和e是独立的耦合常数。

由（10.80）求微商，我们得到

$$U'(\rho)=4\rho^3\left(\frac{\lambda}{4!}+\frac{3e^4}{46\pi^2}\ln\frac{e^2\rho^2}{\mu^2}\right). \tag{10.81}$$

该式有一个非零的根$\langle\phi\rangle$，它满足条件

$$\frac{3e^4}{64\pi^2}\ln\frac{e^2\langle\phi\rangle}{\mu^2}=-\frac{\lambda}{4!}. \tag{10.82}$$

在我们所取的近似适用的范围内，这个关系式是成立的。利用它我们可以从该理论中消去μ。那时，质量标度由$\langle\phi\rangle$建立。与任何重整化参量一样，$\langle\phi\rangle$是该理论的自由参量。这时，等效势可以写成

$$U(\rho)=\frac{3e^4\rho^4}{64\pi^2}\left(-\frac{1}{2}+\ln\frac{\rho^2}{\langle\phi\rangle^2}\right). \tag{10.83}$$

标量粒子的质量则由下式给出

$$m_s^2\equiv U''(\langle\phi\rangle)=\frac{3e^4}{8\pi^2}\langle\phi\rangle^2. \tag{10.84}$$

矢量场照通常方法靠希格斯机制获得质量

$$m_V^2=e^2\langle\phi\rangle^2. \tag{10.85}$$

即使当理论没有内在质量参量时，重整化中质量标度的发生也没有什么不寻常之处。如所周知，为了使未重整理论有意义，我们不得不引入截断。截断动量代表该理论的一个隐标度重整化时，这个隐标度被一个任意的、以跑动重整化点形式出现的有限的标度所代替。在一个“无质量”理论中，人们或许会期待所有的重整化点都是等价的。这里值得注意的是由于粒子靠动力学方式获得质量，所以有一个优越的重整化点存在。“维度蜕化”一

词正是指的是在一个没有内在质量标度的理论中出现优越重整化点：无穷大的截断动量被蜕化成物理质量。

人们普遍认为，在无质量夸克的量子色动力学中要发生维度蜕化.理由是这样的：无质量的量子色动力学应能很好地解释观察到的通常强子的质量谱，而这些强子又都是几乎无质量的 u 和 d 夸克的束缚态。由于在该理论中不存在内在质量标度，维度蜕化必然发生。

10.8 一个非相对论的例子

托恩(Thorn)曾经给出一个关于非相对论量子力学的维度蜕化的有启发性的例子[5]。考虑有着 δ 函数型吸引位势的二维薛定谔方程

$$[-\nabla^2-\lambda_0\delta^2(\boldsymbol{x})]\psi(\boldsymbol{x})=E\psi(\boldsymbol{x}). \tag{10.86}$$

由量纲分析可知，λ_0 是无量纲量。于是，这个哈密顿量不含有内部能标。然而，该体系可能有一个束缚态。为了看清这一点，设 $\phi(\boldsymbol{k})$ 为 $\psi(\boldsymbol{x})$ 的傅里叶变换

$$\psi(\boldsymbol{x})=\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{k}). \tag{10.87}$$

取 (10.86) 式两边的傅里叶变换，我们得到

$$(k^2+B)\phi(\boldsymbol{k})=\lambda_0\psi(0),\qquad B\equiv-E. \tag{10.88}$$

它的解是

$$\phi(\boldsymbol{k})=\frac{\lambda_0\psi(0)}{k^2+B}. \tag{10.89}$$

把上式两边都对 $\boldsymbol{k}$ 求积分，我们得到束缚能 B 的本征值条件

$$1=\frac{\lambda_0}{4\pi^2}\int\frac{d^2k}{k^2+B}. \tag{10.90}$$

右边的积分是发散的。在 $|\boldsymbol{k}|=\Lambda$ 处引入截断，我们得到

$$1=\frac{\lambda_0}{4\pi}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{B}+1\right). \tag{10.91}$$

于是，当 Λ 很大时，我们有

$$B = \Lambda^2 e^{-4\pi/\lambda_0}. \tag{10.92}$$

如果认为 λ_0 是未重整化的耦合常数，那么，我们可以要求它以这样的方式依赖于 Λ，即当 $\Lambda \to \infty$ 时 B 保持有限。由此，这个无穷大的截断被蜕变成了任意的束缚能 B。

这时，束缚能固定了重整化的体系的能标。例如，考虑散射解

$$\phi(\boldsymbol{k}) = 4\pi^2\delta^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) + \frac{\lambda_0}{4\pi}\ \frac{\psi(0)}{k^2 - k_0^2 + i\varepsilon} \tag{10.93}$$

把两边都对 $\boldsymbol{k}$ 积分，我们得到条件

$$\psi(0) = 1 + \frac{\lambda_0\psi(0)}{4\pi^2}\int\frac{d^2k}{k^2 - k_0^2 + i\varepsilon}. \tag{10.94}$$

再一次引入截断 Λ 时，我们发现

$$\psi(0) = -\frac{\ln\Lambda^2}{\ln(-k_0^2 + i\varepsilon)}. \tag{10.95}$$

利用（10.92）消去 Λ，我们得到

$$\lambda_0\psi(0) = -4\pi\left[\ln\frac{-k_0^2 + i\varepsilon}{B}\right]^{-1}. \tag{10.96}$$

于是，重整化的波函数为

$$\phi(\boldsymbol{k}) = 4\pi^2\delta^2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0) - \frac{1}{\pi}\left[(k^2 - k_0^2 + i\varepsilon)\ln\left(\frac{-k_0^2 + i\varepsilon}{B}\right)\right]^{-1}. \tag{10.97}$$

由此式我们可以求得能量 $E = k_0^2$ 时的总散射截面

$$\sigma_{总}(E) = \frac{64}{\pi\sqrt{E}}\left[\ln\left(\frac{E}{B}\right)^2 + \pi^2\right]^{-1}. \tag{10.98}$$

普通的量纲分析会使我们估计出 $\sigma_{总} \propto E^{-\frac{1}{2}}$，但实际上，在高能时 $\sigma_{总} \propto E^{-\frac{1}{2}}(\ln E)^{-2}$。

这个模型好就好在它能使我们以物理的方式理解截断 Λ 的

意义．让我们把 δ 函数型位势看做一个适当选择的方位阱的极限，即

$$[-\nabla^2+V(r)]\psi(\boldsymbol{x})=E\psi(\boldsymbol{x}), \tag{10.99}$$

其中 $r=|\boldsymbol{x}|$，而

$$V(r)=\begin{cases}-\lambda_0/\pi a^2 & (r<a),\\ 0 & (r>a).\end{cases} \tag{10.100}$$

在这个方位阱内，有一束缚态，其束缚能为

$$B=\frac{4}{\gamma^2a^2}e^{-4\pi/\lambda_0} \qquad (\ln\gamma=0.5772\cdots) \tag{10.101}$$

当 $a\to 0$ 时，为了在固定的束缚能 B 处保持束缚态，则位阱的深度必须按下式要求而增加

$$\frac{\lambda_0}{\pi a^2}=\frac{4}{a^2}\left(\ln\frac{4}{\gamma^2a^2B}\right)^{-1}. \tag{10.102}$$

这样一来，参量 λ_0 必须趋于零，才能使位阱的深度增加的速度比 a^{-2} 慢．否则，束缚能就是发散的，而哈密顿量也就不会有下界．在上面的这种处理中，截断 Λ 可以认为就是

$$\Lambda=\frac{2}{\gamma a}. \tag{10.103}$$

10.9 对温伯格-萨拉姆模型的应用

如果把温伯格-萨拉姆模型中的希格斯场看做是一个动力学场，则希格斯势将有辐射修正．把温伯格-萨拉姆拉格朗日密度中的希格斯势写成如下形式

$$V(\rho)=\frac{\lambda_0}{4!}\rho^4+\frac{m_0^2}{2}\rho^2+\text{常数}, \tag{10.104}$$

其中参量 m_0^2 的符号可正、可负［我们用么正规范，这里的场 ρ 是（6.32）式中的 ρ 的 $\sqrt{2}$ 倍］．我们将把所有仅包含矢量玻色子单圈图的辐射修正考虑进来，则由（10.80）式立即可以求得等

效势为

$$U(\rho)=\frac{\lambda}{4!}\rho^4+\frac{m^2}{2}\rho^2+\frac{3\rho^4}{64\pi^2}\sum_V e_V^4\left(-\frac{1}{2}+\ln\frac{e_V^2\rho^2}{\mu^2}\right),$$

(10.105)

其中对V的求和是指对所有的与希格场耦合的矢量玻色子即W^+，W^-和Z求和。每个矢量玻色子通过希格斯机制获得的质量为

$$m_V^2=e_V^2\langle\phi\rangle^2. \tag{10.106}$$

用这个关系式可以消去耦合常数e_V。我们还可以重新定义μ，以把等效势中的所有的ρ^4项都吸收掉。于是，可以写成

$$U(\rho)=\frac{m^2}{2}\rho^2+K\rho^4\ln\frac{\rho^2}{\mu^2}, \tag{10.107}$$

$$K=\frac{3}{64\pi^2\langle\phi\rangle^4}(2m_W^4+m_Z^4).$$

$U(\rho)$ 的微商为

$$U'(\rho)=m^2\rho+4B\rho^3\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{\rho^2}{\mu^2}\right), \tag{10.108}$$

$$U''(\rho)=m^2+12B\rho^2\left(\frac{7}{6}+\ln\frac{\rho^2}{\mu^2}\right).$$

若不考虑辐射修正，则为了产生对称性自发破缺，必须取$m^2<0$。如果考虑辐射修正，则即使$m^2=0$，也会发生对称性的自发破缺。此时，希格斯场的质量可以通过把（10.84）式推广而得到。现在，设想我们把m^2由零逐渐增加。对足够小的正的m^2，尽管希格斯场的质量会变得越来越小，仍会有对称性的自发破缺。如果让m^2继续增加，则在某一点，对称性的自发破缺不再发生，而希格斯场的质量将取其可能的最小值。对不同的m^2值，$U(\rho)$ 的定性特点如图 10.2 所示。

由（10.108）式我们看到在满足下式的$\langle\phi\rangle$处，$U'(\rho)$ 有一个非零根

$$\langle\phi\rangle^2\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{\langle\phi\rangle^2}{\mu^2}\right)=-\frac{m^2}{4K}. \tag{10.109}$$

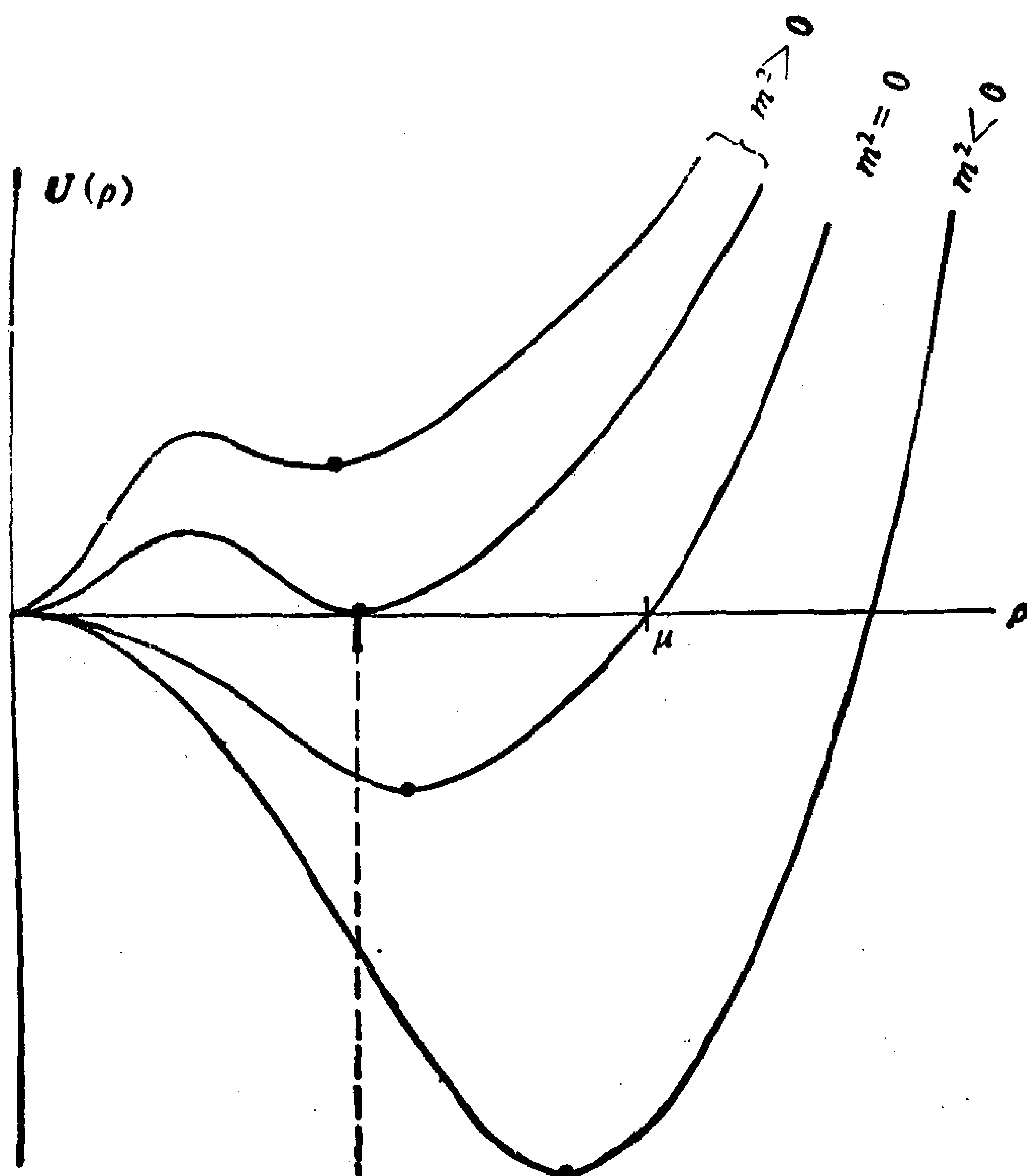


图 10.2 温伯格-萨拉姆模型中只包括规范玻色子圈贡献的单圈等效势，图中所示的各曲线是对拉格朗日密度位势项的质量参量 m^2 取不同值时的势

在这个根的地方，我们有

$$U(\langle\phi\rangle) = -K\langle\phi\rangle^4\left(1 + \ln\frac{\langle\phi\rangle^2}{\mu^2}\right), \tag{10.110}$$

$$m_H^2 \equiv U''(\langle\phi\rangle) = 8K\langle\phi\rangle^2\left(\frac{3}{2} + \ln\frac{\langle\phi\rangle^2}{\mu^2}\right),$$

其中 m_H 是希格斯玻色子的质量。显然，如果 $U(\langle\phi\rangle)$ 变成正值，$\langle\phi\rangle$ 将不再是绝对极小值。因此，必须有 $\ln\langle\phi\rangle^2/\mu^2 \leqslant -1$。

这给出了希格斯质量的一个理论的下限[6]。

$$m_H^2 \geqslant \frac{3}{16\pi^2\langle\phi\rangle^2}(2m_W^4 + m_Z^4). \tag{10.111}$$

由（6.28）和（6.36）我们有

$$m_W^2 = \frac{\pi\alpha\langle\phi\rangle^2}{\sin^2\theta_W} \quad (\alpha \cong 1/137),$$

(10.113)

$$m_z/m_W = \sin\theta_W.$$

因此

$$m_H \geqslant \frac{\sqrt{3}\,\alpha\langle\phi\rangle}{4\sin^2\theta_W}(2+\sec^4\theta_W)^{\frac{1}{2}}. \tag{10.113}$$

利用$\langle\phi\rangle = 247\ \mathrm{GeV}/c^2$，$\sin\theta_W = 0.22$，我们求得

$$m_H \geqslant 6.8\ \mathrm{GeV}/c^2. \tag{10.114}$$

参考文献

[1] 参看 B. W. Lee and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.*, **D5**(1974) 337; **D7** (1973) 1049.

[2] J. Goldstone, A. Salam, and J. Weinberg, *Phys. Rev.*, 127, 965 (1962); G. Jona-Lasinio, *N. Cimento*, 34 (1964) 1790.

[3] R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9** (1974) 1686.

[4] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D7** (1973) 1888.

[5] C. Thorn, *Phys. Rev.*, **D6** (1979) 39, (4.11) 式.

[6] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 36 (1976) 294.

第十一章　轴矢反常

11.1　轴矢反常的起源

我们都熟知，对自由狄拉克粒子，左手和右手的手征态 L 和 R 在零质量极限下彼此没有耦合〔请看（6.5）式〕。由于电磁相互作用不会把 L 和 R 耦合在一起〔请看（6.3）式〕，所以人们可能会想到对于带电的狄拉克粒子也有这种退耦现象发生。如果人们以一个零质量的理论做为出发点，则情况当然如此。但是如果从一个有质量的理论着手讨论，那么在零质量极限下，L 和 R 仍保持彼此的耦合[1]。理由在于，甚至在零质量的极限下，给定螺旋性的一个带电的狄拉克粒子也可以通过发射一个实光子而跃迁到螺旋性相反的虚状态上去。这个效应下面我们将详细讨论，它就是轴矢反常（axial anomaly）的物理起源。

狄拉克场论的零质量特性，形式上可以用在手征变换(chiral transformation)

$$\psi(x) \to e^{-i\omega\gamma_5}\psi(x) \tag{11.1}$$

下拉格朗日密度的不变性来代表。按照诺特定理，手征不变性意味着存在一个守恒的轴矢量流，通常将其取为规范不变的手征流（chiral current）[注a]

$$j_5^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \tag{11.2}$$

利用海森堡（Heisenberg）场运动方程，可以导出一个形式上的

[注a]流的定义中不包括那些表示裸耦合常数的因子，我们要提醒读者，$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$，$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$，它们与阿德勒[2]采用的约定相差了一个符号。

算符恒等式

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2mj_5, \tag{11.3}$$

其中 m 是质量，j_5 是手征密度（chiral density）

$$j_5 = \overline{i\psi}\gamma_5\psi. \tag{11.4}$$

由此，人们预期当 $m\to 0$ 时，$\partial_\mu j_5^\mu \to 0$。然而，这是不正确的。正如我们以后将证明的那样，更仔细的分析给出的都是“反常”的结果：

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2mj_5 + \frac{\alpha_0}{2\pi}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{11.5}$$

其中$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$，$\alpha_0$ 为裸的精细结构常数 〔（11.5）式中的算符都是未重整化的场算符〕。这样，在零质量极限下，j_5^μ不再守恒。这一点与诺特定理并不矛盾，因为$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$是一个矢量的四度散度，因此可以定义一个新的守恒的轴矢量流。不幸的是，这个新的流不是规范不变的，因此不能与物理的场耦合（后面我们要详细阐述这一点）。（11.5）式中的最后一项是轴矢流反常项。它的存在反映了规范不变性和手征不变性的矛盾。

为什么形式结果和“仔细”推理得到的结果会有区别呢？在第九章讨论真空极化时，我们看到象 $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ 和 $j_5^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$这样的流都是奇异算符，这是由于 ψ 是和它在同一时空点的正则共轭量 ψ^+ 耦合而造成的。做为一个推论，关于流的一些形式可能会有不确定性。例如，用运动方程，从形式上能证明 $\partial_\mu j^\mu$ 的所有的矩阵元都为零。但是实际上得到的是象$\infty-\infty$那样的不确定的量。为了求得明确的结果，必须使理论成为严格确定的。为此通常都是引进一些附加的要求（例如象对于真空极化张量引入的$k_\mu \Pi^{\mu\nu}=0$ 那样的条件）。在规范不变性和手征不变性之间所以会发生矛盾就是因为找不到能同时保持$\partial_\mu j^\mu=0$ 和 $\partial_\mu j_5^\mu=0$ 的可接受的物理条件。当人们通过定义$\partial_\mu j^\mu=0$而坚持规范不变性时，就引起了轴矢量反常。要证实这最后一点，最终要依靠实

验。

处理这些奇异算符是一件细致的工作。为此想出了许多专用的方法，包括象“点分裂方法”，“施温格项”，“海欧项”，和“T^*乘积”等这样一些名目。为使问题简化，我们避开了这些方法，而建议有兴趣的读者参考由阿德勒[2]和伽基夫（Jackiw）[3]给出的评述。

11.2 三角图

轴矢反常的最基本的表现形式是三角图（triangle graph），这是如图 11.1 所示的费米子圈图，它有一个轴矢量顶点和两个矢量顶点。图中的这两个图只是外光子线的标号不同，统称“三角图”。阿德勒[4]和贝尔（Bell）以及伽基夫[5]最早对这些图产生的反常进行了讨论，因此也称之为“阿德勒-贝尔-伽基夫反常”。

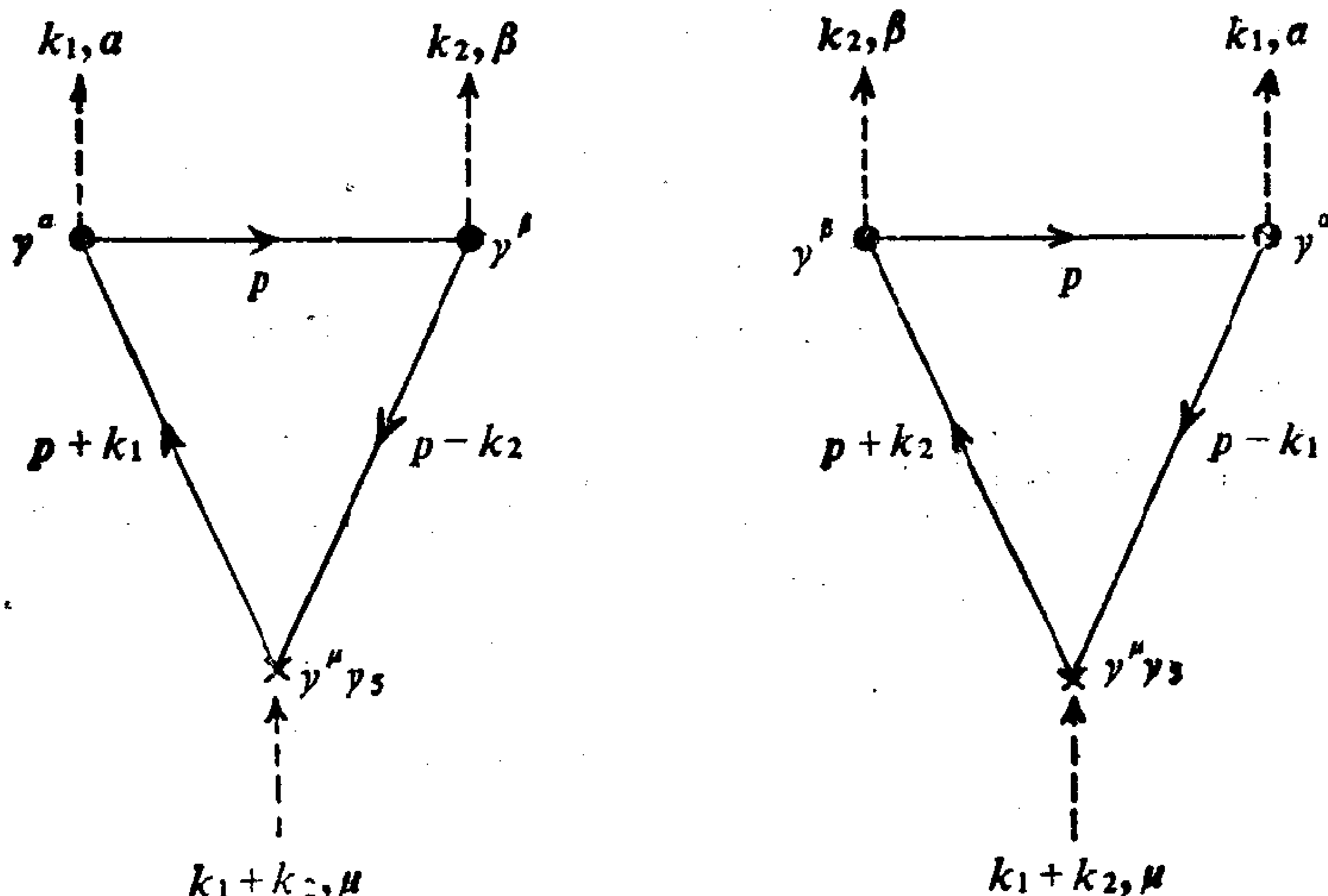


图 11.1 三角图

三角图可以出现在不同的物理理论中。在量子电动力学中，它

是外部轴矢量源产生双光子的最低级图。在温伯格-萨拉姆模型中，当把所有可能的内部费米子圈都加起来时，这个图就给出了虚的 $Z\to 2\gamma$ 过程的最低级振幅（相应的实过程的振幅为零，因为自旋为 1 的态不可能衰变成两个实光子[6]）。对上述这两种情况这种图由相同的数学表达式给出。差别在于耦合常数的数值（它们可以差若干倍）以及与该图连接的外部传播子或波函数。

如果把所有的耦合常数和外部传播子都略掉，我们可以把三角图表示为

$$t_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=s_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)+s_{\beta\alpha\mu}(k_2,k_1), \tag{11.6}$$

其中

$$s_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=-i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{\not p+\not k_1-m}\gamma_\alpha\frac{1}{\not p-m}\gamma_\beta \cdot\frac{1}{\not p-\not k_2-m}\gamma_\mu\gamma_5\Big). \tag{11.7}$$

这是一个线性发散的积分；但是，正如稍后我们将看到的，(11.6) 中的两项之和是收敛的。

规范不变性要求

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=k_2^\beta t_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=0. \tag{11.8}$$

由朴素的论断 (11.3) 式我们预期会有

$$(k_1+k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=2m\nu_{\alpha\beta}(k_1,k_2), \tag{11.9}$$

其中

$$\nu_{\alpha\beta}(k_1,k_2)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{\not p+\not k_1-m}\gamma_\alpha\frac{1}{\not p-m}\gamma_\beta\frac{1}{\not p-\not k_2-m}\gamma_5\Big) +(k_1\rightleftharpoons k_2,\alpha\rightleftharpoons\beta). \tag{11.10}$$

现在我们来检验一下这些论断。

把 (11.7) 式乘以 $(k_1+k_2)^\mu$，且对 μ 求和，我们得到

$$(k_1+k_2)^\mu s_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2) =\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\Big[\frac{1}{\not p+\not k_1-m}\gamma_\alpha\frac{1}{\not p-m}\gamma_\beta\frac{1}{\not p-\not k_2-m}(\not k_1+\not k_2)\gamma_5\Big]. \tag{11.11}$$

可以把上式中的求迹改写成

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\not p+\not k_1-m}\gamma_\alpha\frac{1}{\not p-m}\gamma_\beta\gamma_5\right)+\mathrm{Tr}\left(\gamma_\alpha\frac{1}{\not p-m}\gamma_\beta\frac{1}{\not p-\not k_2-m}\gamma_5\right)$$

$$+2m\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\not p+\not k_1-m}\gamma_\alpha\frac{1}{\not p-m}\gamma_\beta\frac{1}{\not p-\not k_2-m}\gamma_5\right)\quad.\quad(11.12)$$

当完成对 p^μ 的积分后，该式应给出一个赝张量．这样一来，积分时（11.12）的前两项为零，因为它们都只依赖一个外动量，由它不能构成一个赝张量．只有最后一项积分不为零，它证明了（11.9）式．因此，朴素的手征不变性在 $m\to 0$ 的极限下也得到了保证．

类似的，我们发现

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\not p+\not k_1-m}\gamma_\beta\frac{1}{\not p-\not k_2-m}\gamma_\mu\gamma_5\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\not p+\not k_2-m}\gamma_\beta\frac{1}{\not p-\not k_1-m}\gamma_\mu\gamma_5\right),\quad(11.13)$$

设 $$F_{\beta\mu}(p)\equiv\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{\not p-m}\gamma_\beta\frac{1}{\not p-\not k_1-\not k_2-m}\gamma_\mu\gamma_5\right)\quad(11.14)$$

则 $$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[F_{\beta\mu}(p+k_1)-F_{\beta\mu}(p+k_2)\right].\quad(11.15)$$

即使等式右边的两项是对数发散的，这个式子也会为零，因为那时我们就可以独立地把积分变量移动．但事实上这两项都是线性发散的．我们注意到

$$\int d^4pF_{\beta\mu}(p+a)=\int d^4p\left[F_{\beta\mu}(p)+a^\lambda\frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\lambda}+\cdots\right].\quad(11.16)$$

其中略去的那些项的面积分都是零，但是第二项的面积分不为零，因为 $F_{\beta\mu}$ 的渐近行为是 $F_{\beta\mu}\sim p^{-3}$．这样

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=\frac{i}{(2\pi)^4}(k_2-k_1)^\lambda\int d^4p\frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\lambda}.\quad(11.17)$$

这个积分可以通过变换到欧氏动量空间而计算出来：

$$I \equiv a^{\lambda} b^{\beta} c^{\mu} \int d^4 p \frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^{\lambda}} = i a_E^{\lambda} b_E^{\beta} c_E^{\mu} \int d^4 p_E \frac{\partial F_{\beta\mu}(p_E)}{\partial p_E^{\lambda}}$$

$$= i a_E^{\lambda} b_E^{\beta} c_E^{\mu} \int ds_E^{\lambda} F_{\beta\mu}(p_E), \tag{11.18}$$

其中 $$ds_E^{\lambda} = \frac{p_E^{\lambda}}{p_E} ds_E, \quad ds_E = p_E^3 d\Omega, \int d\Omega = 2\pi^2. \tag{11.19}$$

我们需要的只是 $F_{\beta\mu}(p_E)$ 的渐近形式

$$b_E^{\beta} c_E^{\mu} F_{\beta\mu}(p_E) \xrightarrow[p_E \to \infty]{} \frac{4i}{p_E^4} b_E^{\beta} c_E^{\mu} p_E^{\alpha} (k_1 + k_2)_E^{\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{11.20}$$

于是

$$I = -4 a_E^{\lambda} b_E^{\beta} c_E^{\mu} (k_1 + k_2)_E^{\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \int d\Omega \frac{p_E^{\lambda} p_E^{\alpha}}{p_E^2}. \tag{11.21}$$

注意到

$$\int d\Omega \frac{p_E^{\lambda} p_E^{\alpha}}{p_E^2} = \frac{1}{4} \delta_{\lambda\alpha} \int d\Omega = \frac{\pi^2}{2} \delta_{\lambda\alpha},$$

我们有

$$I = -2\pi^2 a_E^{\lambda} b_E^{\beta} c_E^{\mu} (k_1 + k_2)_E^{\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{11.22}$$

把这个结果用到（11.17）式，然后变回闵可夫斯基空间，最后我们求得

$$k_1^{\alpha} t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = -\frac{i}{4\pi^2} k_1^{\alpha} k_2^{\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{11.23}$$

类似地，可以得到

$$k_2^{\beta} t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = \frac{i}{4\pi^2} k_1^{\alpha} k_2^{\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{11.24}$$

我们看到，规范不变性被破坏了。

正如真空极化的情况一样，可以通过减除外部动量的一个适当的多项式而保持规范不变性。（参看§9.3）显然，下列重新定义的振幅满足规范不变性的要求：

$$T_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) \equiv t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) - \frac{i}{4\pi^2} (k_1 - k_2)^{\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{11.25}$$

我们把它看做是三角图的正确表达式。

利用（11.25）式，并注意到（11.9）式，我们发现

$$(k_1+k_2)^\mu T_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=2m\nu_{\alpha\beta}(k_1,k_2)+\frac{i}{2\pi^2}k_1^\mu k_2^\nu\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{11.26}$$

它在 $m\to 0$ 的极限下不为零。这表明这个三角图在保持了规范不变性的同时，却破坏了手征不变性。（11.26）中的最后一项是轴矢反常项。

注意，$T_{\alpha\beta\mu}$在两个外部光子交换下是对称的(玻色对称性)，而且反常项是与 m 无关的。

三角图只依赖于两个独立的动量 k_1,k_2。设

$$q^\mu=(k_1+k_2)^\mu. \tag{11.27}$$

根据洛仑兹不变性和玻色对称性，$T_{\alpha\beta\mu}$ 应为一个不变函数乘以一个赝张量，这个赝张量只能是下列几种张量之一

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu}k_1^\lambda k_2^\nu q_\mu,\quad \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}(k_1-k_2)^\nu,\\&(\varepsilon_{\alpha\mu\lambda\sigma}k_{1\beta}-\varepsilon_{\beta\mu\lambda\sigma}k_{2\alpha})k_1^\lambda k_2^\sigma,\\&(\varepsilon_{\alpha\mu\lambda\sigma}k_{2\beta}-\varepsilon_{\beta\mu\lambda\sigma}k_{1\alpha})k_1^\lambda k_2^\sigma.\end{aligned} \tag{11.28}$$

除了第一个以外所有其它三个都被规范不变性，即

$$k_1^\alpha T_{\alpha\beta\mu}=k_2^\beta T_{\alpha\beta\mu}=0$$

所排除。因此

$$T_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu}k_1^\lambda k_2^\nu q_\mu R(q^2,k_1^2,k_2^2). \tag{11.29}$$

由于（11.23）式是有限的，则通过（11.25）式，可以看到 R 也是有限的。

用类似的论证可以得到

$$\nu_{\alpha\beta}(k_1,k_2)=i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu}k_1^\lambda k_2^\nu S(q^2,k_1^2,k_2^2). \tag{11.30}$$

于是，（11.26）给出下列关系式

$$q^2R(q^2,k_1^2,k_2^2)=2mS(q^2,k_1^2,k_2^2)+\frac{1}{2\pi^2}. \tag{11.31}$$

在 $m\to 0$ 的极限下，R 变成与 k_1^2,k_2^2 无关

$$q^2 R(q^2, k_1^2, k_2^2) \xrightarrow[m\to 0]{} \frac{1}{2\pi^2}, \tag{11.32}$$

这样一来

$$T_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) \xrightarrow[m\to 0]{} \frac{i}{2\pi^2} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu} k_1^\lambda k_2^\nu \frac{q_\mu}{q^2 + i\varepsilon}. \tag{11.33}$$

在零质量的极限下，对三角图的全部贡献都来自反常项，它表现为 $q^2=0$ 处的一个极点（"反常极点"）。稍后，我们将给出这一点的物理解释。要注意，按照（11.31）式，不管 m 是多少，$q^2=0$ 处的反常极点总是存在的。但它是在物理的阈值 $q^2=4m^2$ 以下的，仅当 $m\to 0$ 时才达到物理区域。

11.3 辐射修正

对三角图的二级辐射修正由图 11.2 所示的那些费曼图给出。阿德勒和巴丁（Bardeen）[7] 证明了这些图对于轴矢反常的净贡献为零。他们还论证了更高级的辐射修正也不存在。这导致一个值得注意的结果，这就是（11.26）式的最后一项在微扰论的所有各级近似下，都代表着准确的反常。

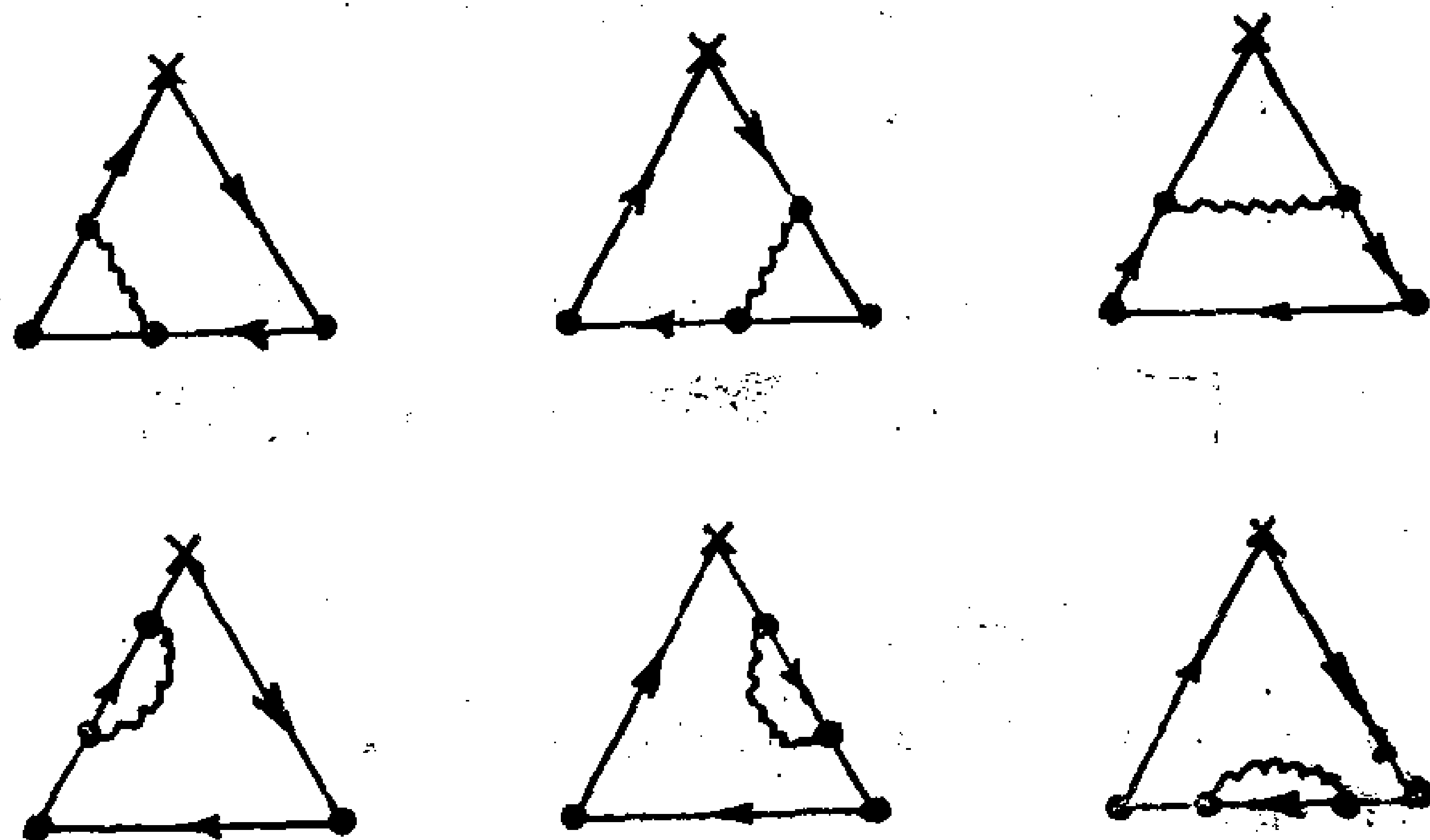


图 11.2 对三角图的二级辐射修正，已经证明它们的反常彼此抵消

对于不存在辐射修正的论证是这样的。对基本三角图的任何

一种辐射修正至少应包含一条内光子线，而且在基本三角图上添加两个额外的顶点。如果人们已经使光子的传播子正规化了（从而牺牲了规范不变性而保持了手征不变性），那时会得到一个有限的积分，因为沿着这个基本三角形图至少有两条额外的电子传播子，它们使积分收敛。这样一来，由于人们能自由地移动积分变量，不会发生任何反常。只有没有内部光子线的图才是基本三角图，唯有它引起轴矢反常。

鉴于这个结论的重要性，应该指出即使在微扰论的框架内，上述论证也并不是无懈可击的。由于这个论证依靠不保持规范不变的截断手续，所以使其结论遭破坏的可能性是存在的。结果是否与截断手续无关，并不清楚。二级计算并不能真正证实上述论证，因为它只是由电子自能或顶点嵌入组成的特殊的修正。于是，到二级近似不存在辐射修正很可能只不过反映了量子电动力学的可重整性。为能真正检验，必须继续计算第四级微扰，那时人们才会第一次碰到新的骨架图，这些图的一个例子如图 11.3 所示。至今，还没有人作过四级微扰的详尽的计算。

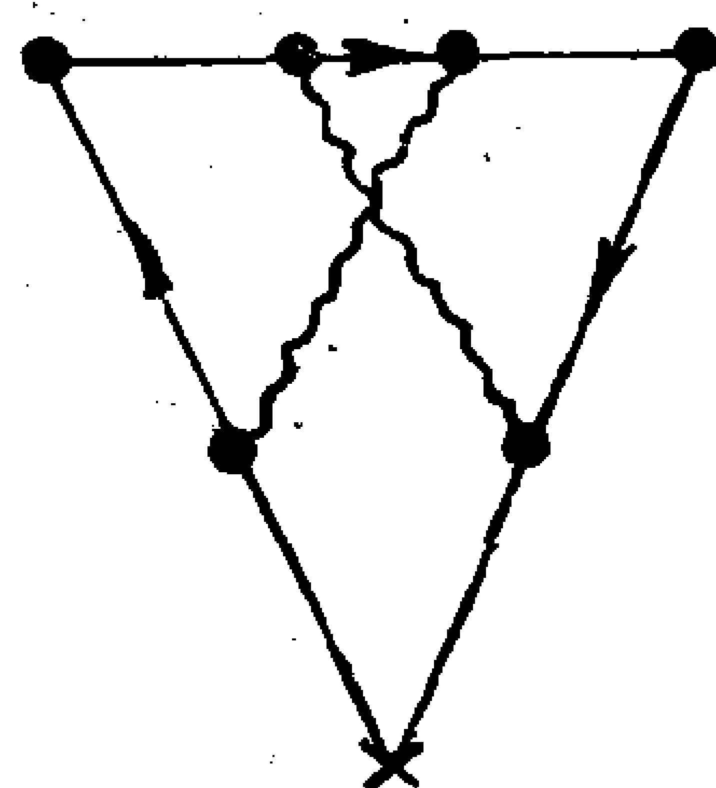


图 11.3 代表着第一个骨架图修正的三角图四级修正

11.4 手征流的反常发散

按照如下的做法，我们可以从（11.26）式导出（11.5）式。规范不变的振幅 $T_{\alpha\beta\mu}$ 可以表示为未重整化的海森堡算符 j_{5}^{μ} 在物理的真空态和物理的双光子态之间的矩阵元：

$$e_0^2 T_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2) = \langle k_1,\alpha;\ k_2,\beta \mid j_{5\mu}(0) \mid 0\rangle. \qquad (11.34)$$

等式的右边不用说也只计算到 e_0^2 的量级。相应的，我们有

$$-ie_0^2(k_1+k_2)^\mu T_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=\langle k_1,\alpha;k_2,\beta|\,\partial^\mu j_{5\mu}(0)\,|\,0\rangle \quad (11.35)$$

取

$$\partial^\mu j_{5\mu}(x)=2mj_5(x)+\frac{\alpha_0}{2\pi}\widetilde{F}^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \qquad (11.36)$$

可以重新得到（11.26）式，其中

$$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu, \qquad (11.37)$$

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta},\ \ \alpha_0=e_0^2/4\pi\ .$$

如果（11.36）式中的所有的算符都用重整化后的算符代替，则裸的精细结构常数 α_0 也要用重整化后的值取代。（11.26）式的辐射修正不存在将意味着（11.36）式是一个对于微扰论所有各阶都成立的算符恒等式。

注意到

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\partial^\mu X_\mu,$$

$$X_\mu=2\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}A^\alpha\partial^\beta A^\gamma, \qquad (11.38)$$

我们可以定义一个新的轴矢流

$$J_5^\mu\equiv\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi-\frac{\alpha_0}{2\pi}X^\mu, \qquad (11.39)$$

它满足

$$\partial_\mu J_5^\mu=2mj_5, \qquad (11.40)$$

因而在 $m\to 0$ 的极限下是守恒的．这个新的流不是规范不变的，因此不可能与物理场耦合．然而，根据（11.38）式，它相应的荷 Q_5 在 $m\to 0$ 的极限下是运动常数，而且是规范不变的

$$Q_5\equiv\int d^3xJ_5^0=\int d^3x\left(\psi^+\gamma_5\psi-\frac{\alpha_0}{\pi}\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}\right). \qquad (11.41)$$

规范变换 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\nabla\chi$ 导致一个等于零的面积分．因而 Q_5 可以是一个物理量．事实上

$$[Q_5,\psi(x)]=-\gamma_5\psi(x), \qquad (11.42)$$

它表明 Q_5 是无穷小手征变换的生成元

$$\Psi \to (1 - i\omega\gamma\psi_5) = \psi + i\omega[Q_5, \psi]. \quad (11.43)$$

我们附带指出，如果 A^μ 换成非阿贝尔规范场 A_a^μ，则上述情况就会改变。那时，要把（11.36）式推广，以 $\widetilde{F}_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu}$[8] 代替 $\widetilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$。（11.38）中的 X_μ 要用（5.6）代替。如果继续采用（11.39）式，则由于拓扑荷的存在，在“大”规范变换下 Q_5 不再是规范不变的（参看 8.6 节）。它的物理后果将在 12.5 节中讨论。

11.5 轴矢反常的物理解释

为了从物理上理解轴矢反常的起源，我们来考虑如下的过程

轴矢源⟶两个实光子。

三角图给出了这一过程的最低级近似。我们将研究它的“吸收部分(absorptive part)”[9]，它是把图按图 11.4 所示的方式“截断”而得到的。这意味着我们把截断的电子传播子用它们的虚部来代替，而这些虚部都是使电子变到质壳上去的 δ 函数。与传播子上箭头所指的方向反方向传播的电子被定义为正电子。因此，这个吸收部分是描述下列两个衔接的物理过程的振幅的乘积：

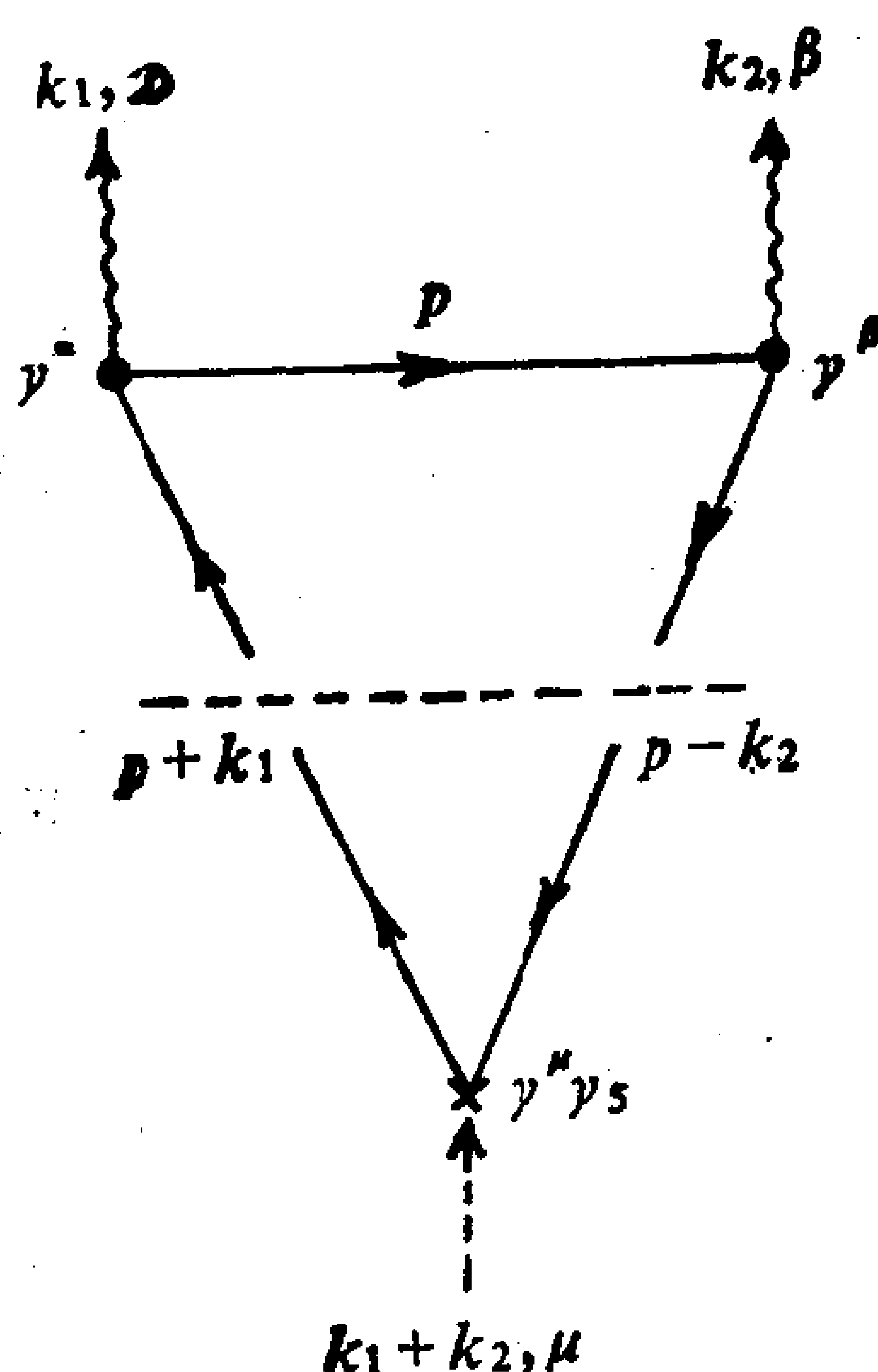


图 11.4 用把图截断的方法得到三角图的吸收部分

1. 源 $\to e^+ + e^-$；
2. $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$。

三角图可以由它的吸收部分通过色散关系[10]求得。吸收部分确定了（11.29）式中不变函数 $R(q^2)$ 的虚部。对于复的宗量，$R(s)$如下式

$$R(s)=\frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}ds'\frac{\mathrm{Im}R(s')}{s'-s},\tag{11.44}$$

再加上一些可能的"减除项"，这些减除项都是 s 的多项式。由（11.25）式可见，$T_{\alpha\beta\mu}$ 和 $t_{\alpha\beta\mu}$ 有着相同的吸收部分，它是规范不变的和单值的。轴矢反常起源于在 $m\to0$ 的极限下这个吸收部分不为零。事实上，由（11.32）式可见

$$\mathrm{Im}\,R(q^2)\xrightarrow[m\to0]{}-\frac{1}{2\pi}\delta(q^2).\tag{11.45}$$

我们的目的就是要从物理上解释这个结果。

初看起来，根据手征不变性，这个吸收部分在零质量的极限下似乎为零。其理由如下。

取两个终态光子的质心参考系。在第一个过程中，轴矢源必须产生总自旋为 0 的 e^+e^- 对，因为自旋为 1 的一个态不可能接着变成两个实光子[6]。源可以通过相互作用 $\gamma_0\gamma_5$ 实现这一点。这样一来，e^+和e^-必须有相同的螺旋性。于是在零质量极限下，它们有相反的手征性。由于 $\overline{R}\gamma_0\gamma_5L=0$，所以在零质量极限下，第一个过程是禁戒的。

在第二个过程里，e^+e^- 对通过一个虚的中间态湮没成两个光子，图 11.5 画出了一种可能的情况（另一种可能的中间态可以通过把虚电子的螺旋性反转而得到。把出射的虚电子换成入射的虚正电子可以得到其它的一些可能的中间态）。顶点 B 的跃迁是允许的，而顶点 A 的跃迁在 $m\to0$ 的极限下是禁戒的。原因在于顶点 A 要求螺旋性反转，在零质量极限下，它是与手征性反转相同的，而电磁相互作用却保持手征性不变。对任何一种其它的中间态，总有一个顶点可允许，另一个顶点是禁戒的，

于是，第二个过程也是禁戒的。

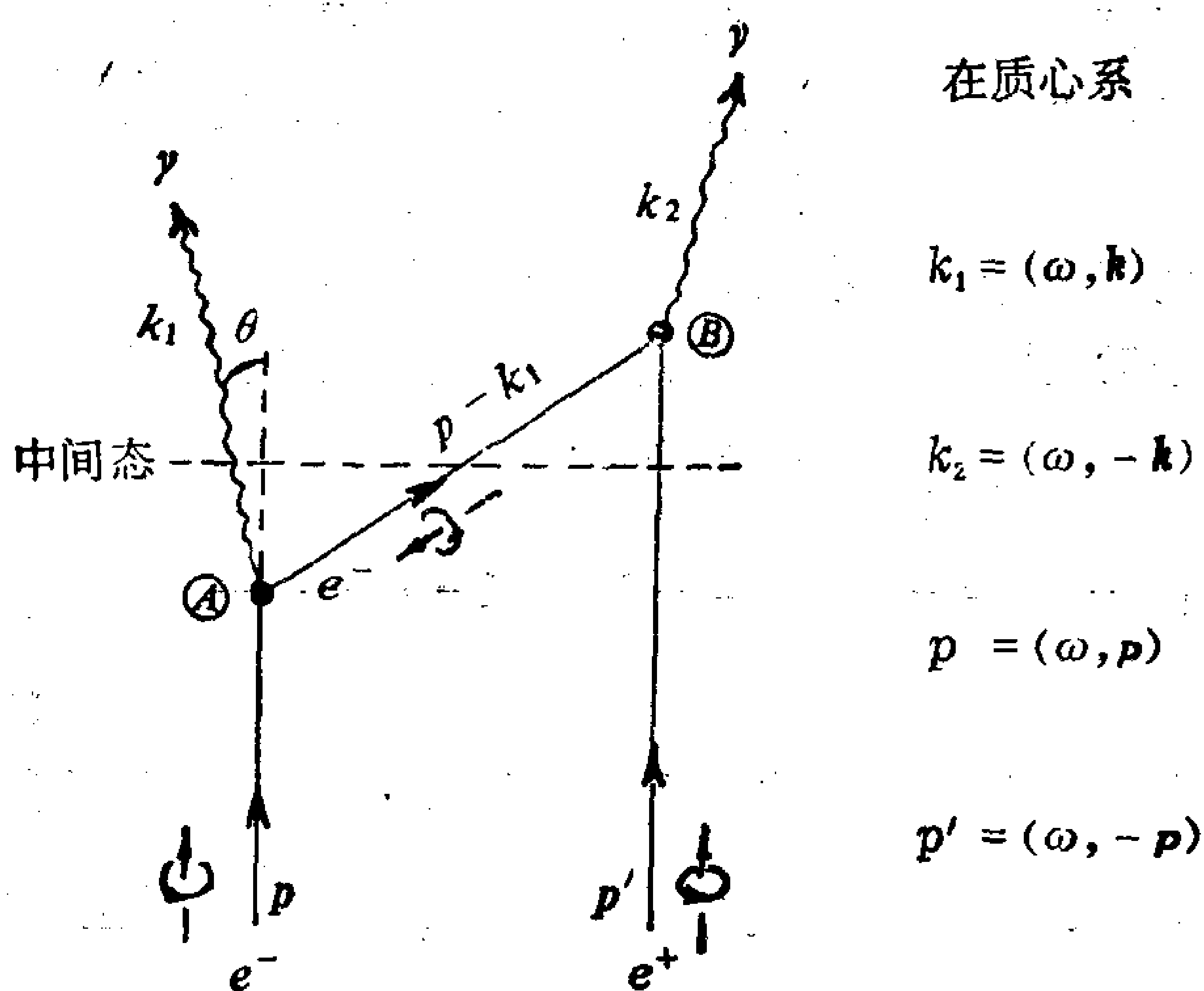


图 11.5 对于三角图的虚部有贡献的一个虚的中间态，反常来源于在无质量的极限下这个虚态可能变成实的，而在阈值处给出一个非零的贡献

然而，这还不是全部情况。当$m\to 0$时，第二个过程中的虚态趋近于一个实态，因为那时$e\to e+\gamma$过程不再被能量-动量守恒所禁戒。如果电子有非零的动量$\boldsymbol{p}$，则光子只能沿向前的方向发射。但是，如果$\boldsymbol{p}\to 0$，则光子可以沿任何方向发射。这样，尽管矩阵元为零，可是能量分母也是零，它们可以相互补偿。情况并不象初看上去那么简单，我们不应过早地取$m\to 0$的极限。

通过下面粗略的论证，我们来估算一下这个吸收部分。第一个过程（源$\to e^+e^-$）的矩阵元有一个因子m。第二个过程（$e^+e^-\to\gamma\gamma$）的矩阵元，当对所有可能的中间态求和时，是m乘上虚电子的费曼传播子。把这两个矩阵元乘在一起并对末态光子之一的所有发射方向求积分，则得到

$$\operatorname{Im} R(\omega,m)\propto\frac{m^2}{\omega^2}\int d(\cos\theta)\,\frac{1}{(p-k_1)^2-m^2}\quad(\omega>m)$$

$$\operatorname{Im} R(\omega, m) = 0 \quad (\omega < m), \tag{11.46}$$

其中ω是任何一个光子的质心系的能量，θ是两个光子之一的质心系发射角，而p和k_1是图 11.5 中定义的四维矢量。因子ω^{-2}的引入是为使量纲正确，这个因子是唯一的，至多差一个纯数值常数，因为在这个问题中除m以外没有任何其它能量标度。为了与（11.45）式比较，还要注意双光子体系的不变质量是

$$q^2 = 4\omega^2. \tag{11.47}$$

简单的代数运算给出

$$(p-k_1)^2 - m^2 = -2p\cdot k_1 = -2\omega^2\left[1-\left(1-\frac{m^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\cos\theta\right]. \tag{11.48}$$

在求积分之前，我们先来看一看能量分母为零是否可以补偿矩阵元的为零。先考虑运动学区域$\frac{m}{\omega}\ll 1$和$\theta\ll 1$，在那里（11.48）式变成

$$-\omega^2\left(\theta^2+\frac{m^2}{\omega^2}\right).$$

而（11.46）式中的被积函数变成正比于

$$\frac{(m/\omega)^2}{\theta^2+(m/\omega)^2}\xrightarrow[m\to 0]{}\begin{cases}1 & (\theta=0),\\ 0 & (\theta\neq 0).\end{cases} \tag{11.49}$$

它对角度积分为 0，于是，这时不会出现补偿，对于阈以上的任何ω值，当$m\to 0$时吸收部分为零。

其次，考虑阈值$\omega = m$。这时（11.48）式变成$-2m^2$，与θ无关。于是，当$m\to 0$时，能量分母象m^{-2}那样发散，因而刚好与为零的矩阵元补偿。我们预料，吸收部分在阈能处有一个峰，因而在零质量极限下，在该处发散（由于来自于量纲分析的额外因子ω^{-2}）。

把（11.48）式代入（11.46）式，我们得到

$$\operatorname{Im}R(\omega, m) = C\frac{m^2}{\omega^4}\left(1-\frac{m^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{1-(1-m^2/\omega^2)^{1/2}}{1+(1-m^2/\omega^2)^{1/2}}, \tag{11.50}$$

其中，C是一个纯数值常数。详细的计算表明，这实际上就是正确的答案[9]。在图 11.6 上我们画出了 ImR 对ω^2 的函数曲线，m取了不同的值。可以看到

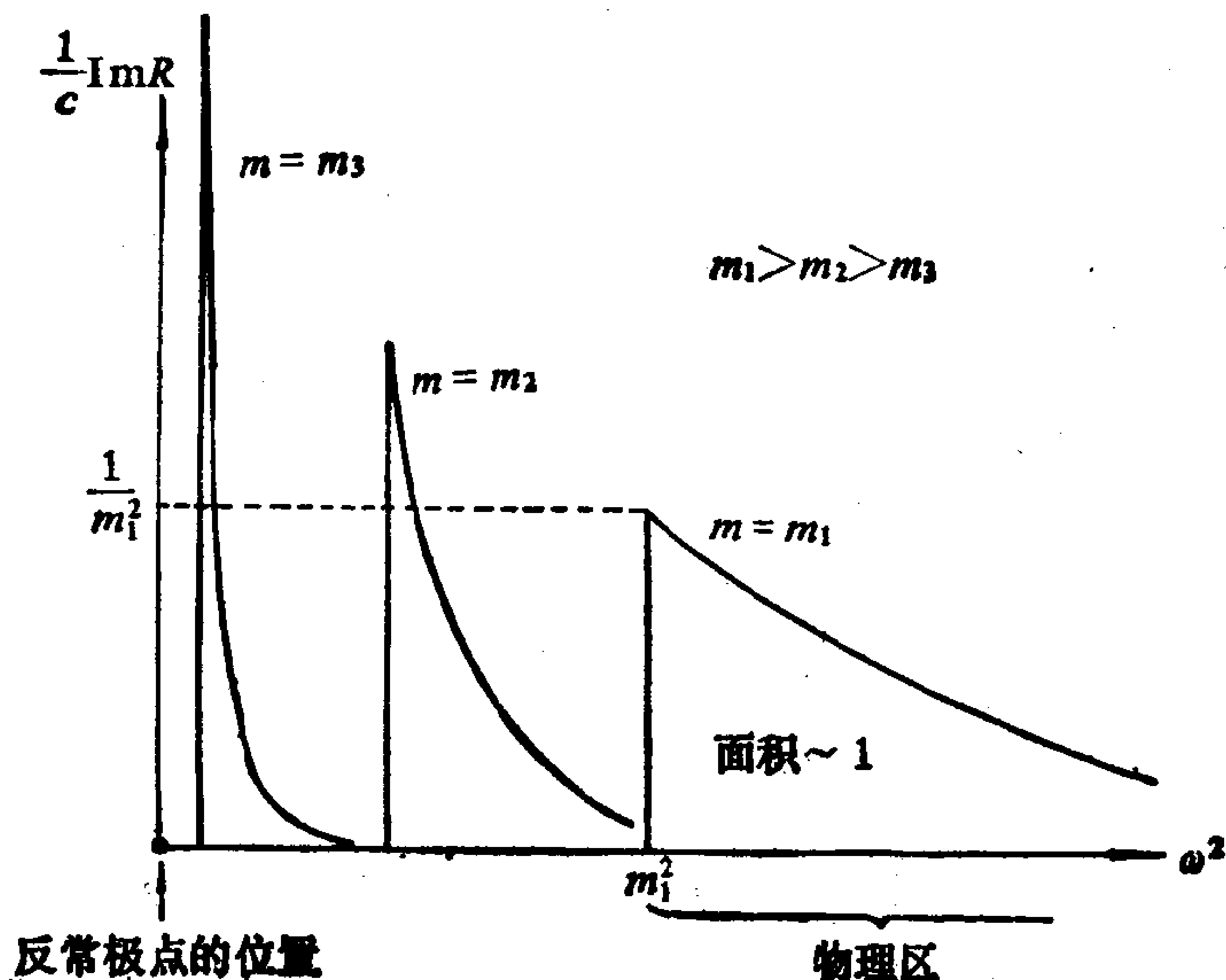


图 11.6 三角图的吸收部分，当$m \to 0$ 时曲线下的面积保持有限值，由此可知当 $m \to 0$ 时曲线趋于 $\delta(\omega^2)$。

$$\mathrm{Im}\, R(\omega, m) \xrightarrow[m \to 0]{} \text{常数} \cdot \delta(\omega^2) \, . \qquad (11.51)$$

这解释了（11.43）式。

我们还可以从解析性的角度来理解 ImR 的行为。由(11.31)式可见，反常表现为 R 在 $q^2=0$ 处有固定的极点和确定的留数（反常极点）。它只是在 $m \to 0$ 的极限下才接触到物理区域 $q^2 \geqslant 4m^2$。如果把 m 由零逐渐增大，则极点保持在原来位置上，而物理区却离开了它。那时，这个极点的存在仅通过 ImR 向着阈值方向增加而间接地表现出来。

11.6 反常的抵消

与 9.2 节讨论的顶角$\Gamma^\mu(p_1,p_2)$类似，我们定义轴矢顶角函数$\Gamma_5^\mu(p_1,p_2)$为描写轴矢源产生一个费米子-反费米子对的所有连通的本征费曼图（去掉外部传播子）的和。图 11.7 给出了其中的一些图。我们特别感兴趣的是最后一个图，它包含一个三角图，因此，是“反常”的。这个图是对数发散的（虽然三角形子图是有限的），因为三角图随其外动量线性地增大。反常图的这种发散使Γ_5^μ成为不可重整的。

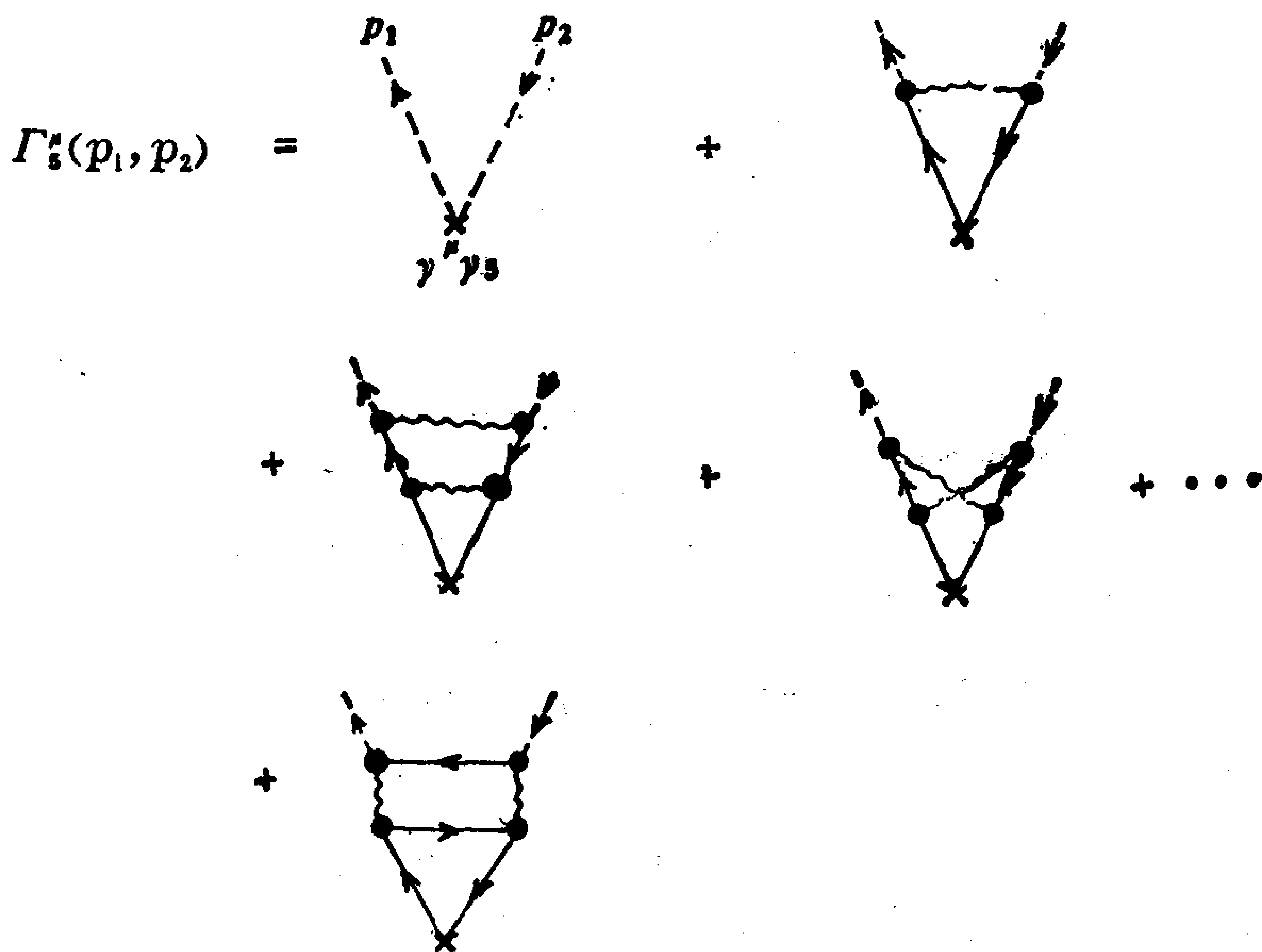


图 11.7 轴矢顶角函数的费曼图，最后一个图是反常的，它有着不同于其它图的标度性质，因而导致不可重整性

我们回忆起可重整性是依赖于标度性质的，比如象Γ^μ情况下的（9.50）式，它使我们能够把费曼图的发散部分减除掉，并把

算符用把无穷大重新标度的量表示出来。在量子电动力学中，一个“正常的”费曼图的标度性质是由每个顶点连接两条电子线、一条光子线且带有一个因子 e_0 所决定的。然而，三角图却有着不同的标度性质，这一点我们可以参照（11.36）式间接地看到。它的第一项是正常项，而反常的第二项相应于两条光子线连接到有因子 e_0^2 的一个顶角的费曼图。这意味着 Γ_5^μ 中的反常图有着与正常图不同的标度性质，而没有任何重整化手续能同时把这两种图的发散都去掉。因此，Γ_5^μ 的确是发散的。

应该指出，三角图的与质量有关的部分是正常的，如果只有这单独一项，本来是可以重整的。但反常的部分使可重整性遭到破坏，是与质量无关的。

Γ_5^μ 的不可重整性在量子电动力学中并不重要，因为在那个理论中它不是一个物理量。然而，它在温伯格-萨拉姆模型中确实会发生，例如在如图 11.8 所示的图中，它对 e-ν 散射是有贡

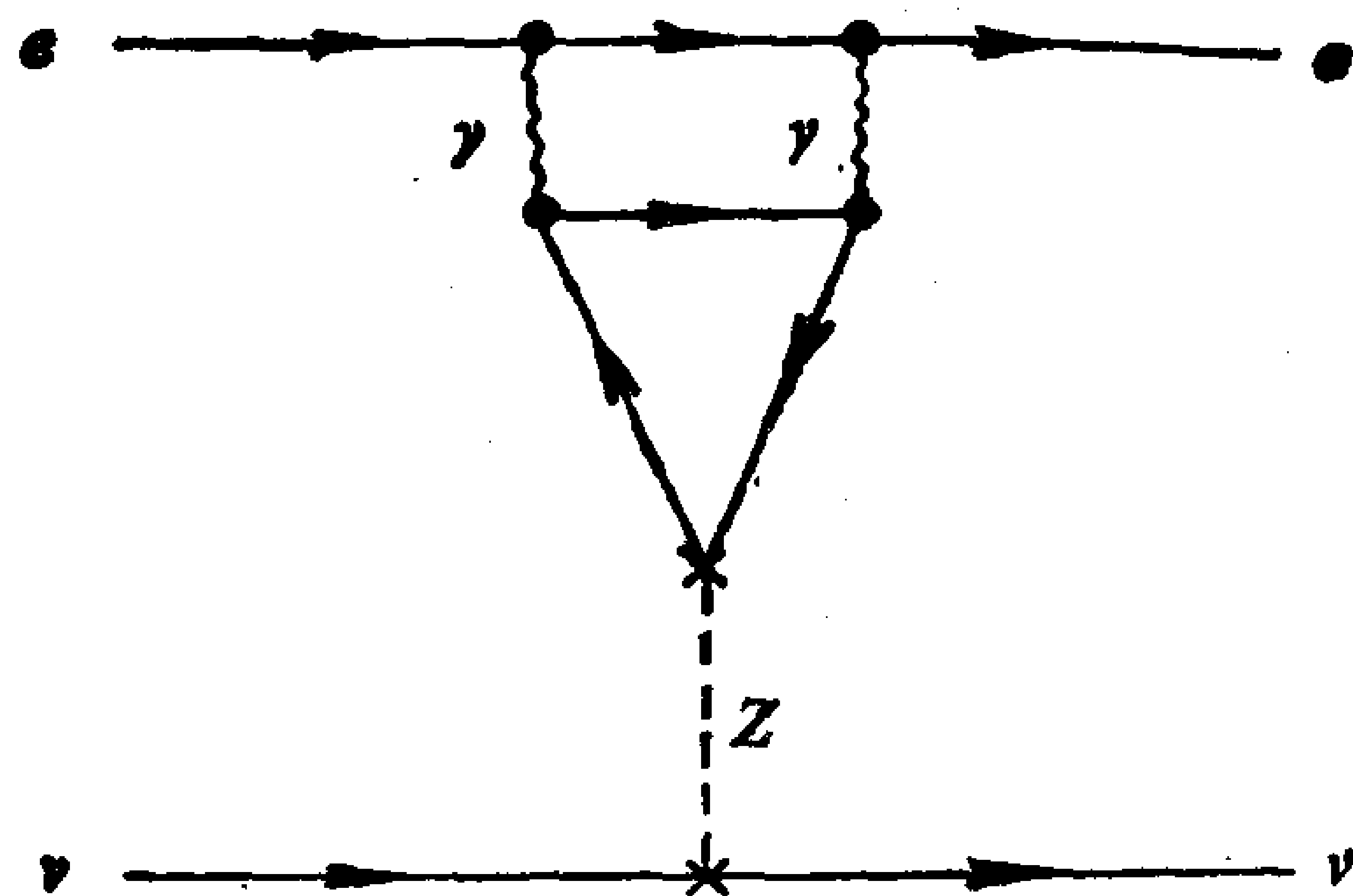


图 11.8 在温伯格-萨拉姆模型中对电子-中微子散射的一个无穷大的不可重整的贡献。可重整性要求所有可能的费米子三角图的轴矢反常相互抵消

献的。尽管它是高阶图，可是单单这一个图就会给出散射截面为无穷大的灾难性的预言。不过，我们还必须对所有可能的费米子三角图求和。正如我们在下面将看到的，当把第一代的所有成员

e, ν, u, d, 的贡献都加起来时，所有的反常部分奇迹般地彼此抵消，只剩下一个可重整的与质量有关的留数。它是耦合常数的如此高阶的量，以致于实际上可以忽略掉。

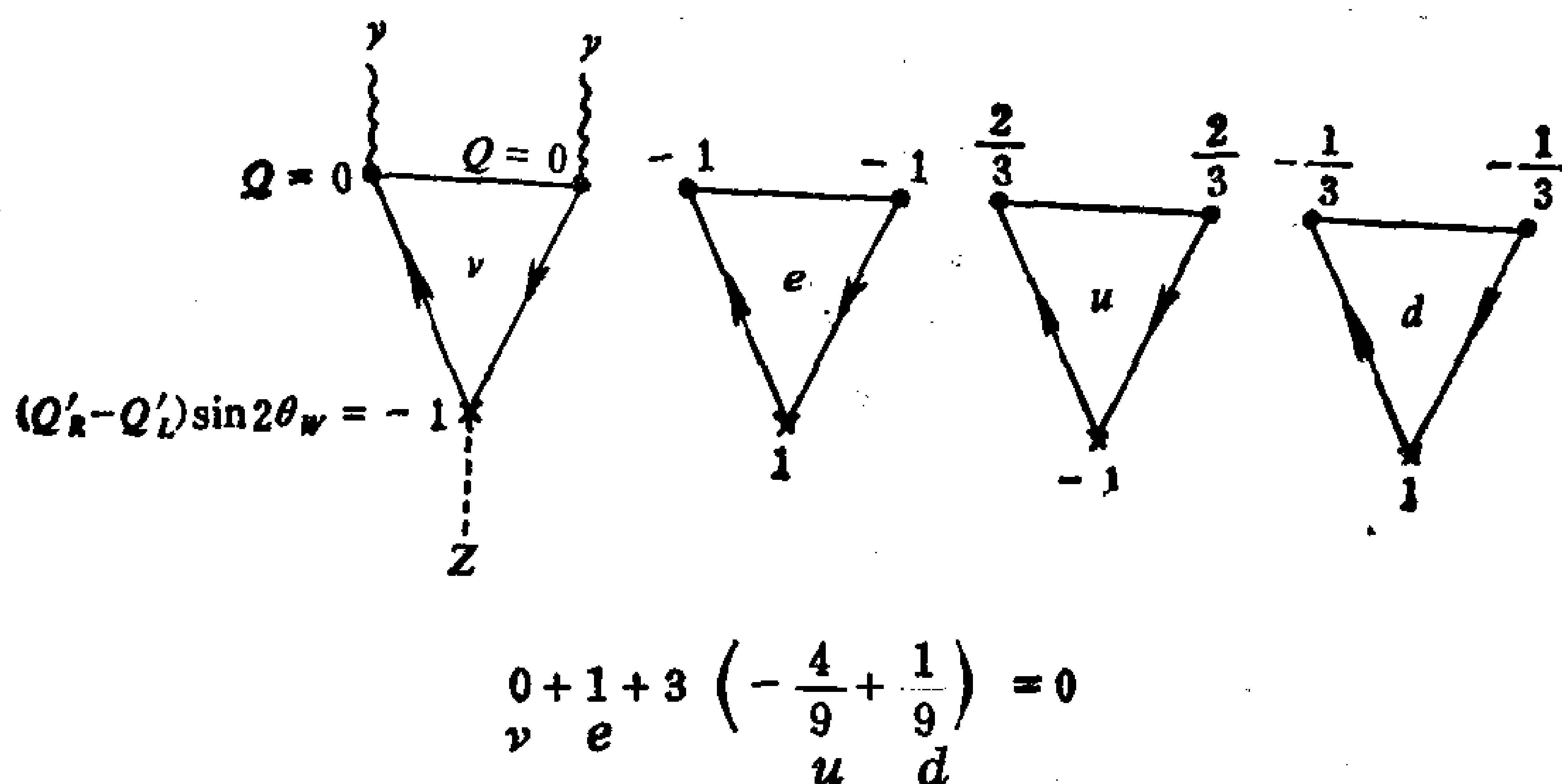
设三角图中可能的费米子用 n 来标上号，且设 $T^{(n)}_{\alpha\beta\mu}$ 代表第 n 个费米子的贡献。则虚过程 $Z\to\gamma\gamma$ 的振幅为

$$M_{\alpha\beta\mu}=\sum_n Q_n^2(Q'_R-Q'_L)_n T^{(n)}_{\alpha\beta\mu}, \tag{11.52}$$

其中 Q_n 是电荷，Q'_{Rn} 和 Q'_{Ln} 是第 n 个费米子的右手和左手中性荷。这些量子数都在表 6.2 中给出了。利用(11.26)式，我们求得

$$\begin{aligned} q^\mu M_{\alpha\beta\mu} &= 2\sum_n Q_n^2(Q'_R-Q'_L)_n m_n \nu^{(n)}_{\alpha\beta} \\ &\quad+\frac{i}{2\pi^2}k_1^\mu k_2^\nu \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\sum_n Q_n^2(Q'_R-Q'_L)_n. \end{aligned} \tag{11.53}$$

上式最后一项是反常项，它与质量无关。在图 11.9 上我们画出了第一代费米子有关的顶点，从该图可以得到



$$\underset{\nu}{0}+\underset{e}{1}+3\left(-\underset{u}{\frac{4}{9}}+\underset{d}{\frac{1}{9}}\right)=0$$

图 11.9 在温伯格-萨拉姆模型中虚过程 $Z\to2\gamma$ 的轴矢反常的相消

$$\sum_n Q_n^2(Q'_L-Q'_R)_n=\frac{1}{\sin2\theta_W}\left[\underset{\nu}{0}+\underset{e}{1}+3\left(-\underset{u}{\frac{4}{9}}+\underset{d}{\frac{1}{9}}\right)\right]=0. \tag{11.54}$$

要注意，考虑到色量子数，每一种夸克味要记三次。这样一来，

对于任何值的温伯格角，反常都是相消的。于是，$M_{\alpha\beta\mu}$ 是可以按照通常方式重整化的。

在温伯格-萨拉姆模型中还存在着一些可能的三角图，它们相应于 $Z\to W^+W^-$，$\gamma\to W^+W^-$ 等。为使该理论是可重整的，所有这样的图的反常都必须抵消。在这些更普遍的图中，沿三角形圈的费米子种类可能发生变化，结果使得沿着这个圈图的几个费米子传播子，一般地有着不同的质量。仍是因为反常与质量无关，使得抵消只依赖于费米子的量子数。对一个特殊的过程，反常抵消的条件是：

$$\mathrm{Tr}[(V_1V_2+V_2V_1)A]=0, \tag{11.55}$$

其中 V_1 和 V_2 是在两个矢量顶点处的电荷矩阵，而 A 是轴矢顶点出现的轴矢荷矩阵。下面我们将表述一个反常相消的普遍规则，而不去对每种情况逐一地证明条件(11.55)式。

考虑任何一个规范理论。设费米子多重态由列矢量 ψ 表示，它的元素都是狄拉克旋量。与规范场耦合的守恒流是

$$j_a^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu t_a\psi, \tag{11.56}$$

其中 $t_a(a=1,\cdots,N)$ 是规范群的生成元，由作用于 ψ 的矩阵表示。如果 ψ 的右手分量和左手分量在规范群作用下变换方式不同，则对右手和左手分量作用的 t_a 将由不同的矩阵 t_a^R 和 t_a^L 表示。因此，我们可以写成

$$j_a^\mu=\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu t_a{}^R(1+\gamma_5)\psi+\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu t_a{}^L(1-\gamma_5)\psi. \tag{11.57}$$

在任何其三个顶点都含有这些流的三角图中，费米子圈必定或者完全是左手的或者完全是右手的，因为右手与左手之间没有任何耦合。如果一个特殊的左手圈图是可允许的，那么相应的右手圈图也是允许的，后者的贡献与前者只区别于 $\gamma^\mu\gamma_5$ 顶点的符号上。这样，没有起源于规范作用的反常条件，对于所有的 a,b,c，为

$$\mathrm{Tr}[\{t_a^L,t_b^L\}t_c^L]-\mathrm{Tr}[\{t_a^R,t_b^R\}t_c^R\}=0. \tag{11.58}$$

当然，该理论还可能有其它引起反常的守恒流（例如，与非规范的整体对称性有关的）。但是，正如Γ_5^s的反常与量子电动力学的可重整性无关一样，它们也不会使该理论成为不可重整的。

现在我们对温伯格-萨拉姆模型检验一下(11.58)式。它有四个生成元t_0和$t_k(k=1,2,3)$，满足

$$[t_0,t_k]=0,\ \mathrm{Tr}t_i=\mathrm{Tr}t_k=0. \tag{11.59}$$

我们还记得

$$t_k^R\equiv 0,\ t_k^L=\frac{1}{2}\tau_k, \tag{11.60}$$

而左手二重态的两个生成元有相同的t_0。易证，对于右手和左手的表示都有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}[\{t_i,t_j\}t_k]=0,\\&\mathrm{Tr}[\{t_i,t_j\}t_0]=0,\\&\mathrm{Tr}(t_it_0^2)=0.\end{aligned} \tag{11.61}$$

剩下有待检验的只有t_0^3的迹如何。利用表6.2直接计算，我们发现（记住夸克有颜色）

$$\mathrm{Tr}(t_0^L)^3=\mathrm{Tr}(t_0^R)^3=-\frac{2}{9}. \tag{11.62}$$

于是，温伯格-萨拉姆模型中所有的反常都抵消了。

使抵消得以发生的充分条件是

——反常不依赖于质量；

——反常没有任何辐射修正。

因此，抵消完全是一个费米子代内的量子数的安排的结果。

由于温伯格-萨拉姆模型中三代费米子的多重态结构完全相同，所以每个代内所有的反常相互抵消。发生这些抵消的必然性就是对这种标准的代结构的最好的理论支持。它强烈地暗示着第三代中尚未观测到的成员即ν''和t应当存在。更一般地讲，所有的反常相抵消的要求对于可能的物理模型加上了严格的限制[11]。

11.7 特霍夫特原理

随着夸克和轻子数目的迅速增长，自然会产生这样的问题：它们是不是可以分解为更简单的组分．通常人们总是用他们所熟悉的语言来思考的．所以，最早的一些想法，认为这些夸克和轻子或许是由另外一些费米子——前子(preon)[12]所组成的，就是不值得奇怪的．我们面对的头一个难题是：电子为什么这样小而又这样轻．假定电子是禁闭在其固有半径之内的无质量的前子的束缚态，这个半径的实验上限为$a=10^{-16}$ cm．则，朴素的直觉就会使我们预期电子的质量应该大于$a^{-1}\sim10^{6}m_e$．如果这种束缚态的图象定性上是正确的，那时必须有某一原理，可以把电子的质量压低．特霍夫特提出[13]，这个原理就是手征不变性，它可以表述为下列形式：

一个组合粒子应该重新产生由它的费米子组分引起的轴矢反常．

这个原理似乎是显而易见的．我们知道，电子一定会表现出轴矢反常，而在组合模型中，这个反常必须起源于它的更类点(point like)的组分．然而，正如我们下面详细的考察所表明的，这些结论都是非平凡的．这一原理的用处可以概述如下．在无质量前子的理想极限情况下，反常极点（不管质量是多少，它总是在$q^2=0$处）位于物理区内．如果前子是禁闭的因而是不可观测的，则这个反常极点必定表现为是由物理的束缚态所引起的，而且后者还必须有零质量．如果手征对称性不是自发破缺的，那么我们就可以把这个束缚态看成是电子，那时，实际观测到的电子质量就要归因于前子有质量（这个质量无论是由于什么原因产生的）．尽管这个原理不能使我们计算出电子质量，它却可以对这个质量这样少给出定性的解释．

为了更详细地讨论特霍夫特原理，对于前子我们采用一个模型，但希望所得的结果比这个模型要普遍得多。前子用一个狄拉克场 ψ 描述，它与规范场 G_a^μ 相耦合，而 G_a^μ 相应于一个单纯规范群，比如 $SU(N)$ 群的生成元 L_a。拉氏密度为

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial^\mu + igL_aG_a^\mu)]\psi - \kappa\bar{\psi}\psi \tag{11.63}$$

式中的 κ 是要取极限 $\kappa\to 0$ 的。这个模型与量子色动力学(QCD)有着相同的结构，可能的差别只在于规范群的选择和费米子味多重态的结构。利用这一相似性，我们可以引入 QCD 的一些常用说法。

象 QCD 中的夸克一样，假定前子也是永久禁闭的。于是，也应发生维度蜕化，它产生禁闭尺度，也即，一个电子的大小。该理论应是渐近自由的，这意味着前子的味数是有限的。为了简单，取前子为一个味，它是 $SU(N)$ 的基础表示。

在这个模型中，有两种没有规范化的对称性，即"电磁的" $U(1)$ 和手征 $U(1)$ 对称性，假定它们都是不破缺的[注 b]。它们给出两个守恒流

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi. \tag{11.64}$$

尽管这些流不与该模型中任何动力学场耦合，我们却可以假想引入一些与它们耦合的外源，且测量三个流的关联函数(correlation function)

$$C_{\alpha\beta\mu}(x,y) = i\langle 0\,|Tj_\alpha(x)\,j_\beta(y)\,j_{5\mu}(0)|\,0\rangle. \tag{11.65}$$

它描写不存在外源时体系的真空涨落。轴矢反常的存在意味着不同时空点的 j_α，j_β 和 $j_{5\mu}$ 的真空涨落有一定的关联。$C_{\alpha\beta\mu}$ 的吸收部分包含着该体系中能使信号从一个关联点传递到另一个关联点

[注 b]在这方面，这个模型与 QCD 不同。人们认为 QCD 中手征对称性是自发破缺的，因而产生一个赝标戈德斯通玻色子，可以看做是 π 介子(参见 12.4 节)，我们不能由第一原理来理解为什么会发生这种情况。于是，也说不出来必须对前子模型加上什么样的约束以使自发破缺不发生。

的物理激发的信息。因此，$C_{\alpha\beta\mu}$ 是前子体系的一个内在的性质。

我们假定通过把前子的规范相互作用用微扰论处理，且在零级近似下把前子看做是自由粒子可以研究$C_{\alpha\beta\mu}$ 的短距离行为。这和 QCD 中部分子模型的基本假定是相同的。由于缺乏对禁闭从第一原理的理解，我们不能实际证明这一假定的正确性。然而我们可以提出下列似乎说得过去的论证：

1. 由于有渐近自由，做为比禁闭尺度所建立的动量值还高得多的动量转移的传递者，前子应看做是自由粒子。

2. 在 QCD 中渐近自由微扰理论得到了与实验相符的结果。

按照这一假定，对于趋于很高值的动量，$C_{\alpha\beta\mu}$ 的傅氏变换由通常的三角图给出，这个三角图的闭合圈由前子组成。即

$$T_{\alpha\beta\mu}(k_1,k_2)=\frac{iN}{2\pi^2}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu}k_1^{\lambda}k_2^{\nu}\frac{q_\mu}{q^2+i\varepsilon}, \quad q=k_1+k_2. \tag{11.66}$$

其中 $k_1\to\infty$，$k_2\to\infty$。要注意，渐近区包括$(k_1+k_2)^2=0$ 的点，因此覆盖着反常极点。式中增加了与前子"色"的数目相应的因子 N。若假定不存在任何辐射修正，则(11.66)式对规范耦合常数 g 的任何阶都是成立的。

我们还记得(11.66)式是通过强加"电磁的" $U(1)$ 对称性，牺牲了手征 $U(1)$ 对称性而求得的，在这里，就没有必要这样做了。我们可以把一个k_1,k_2的多项式加到(11.66) 式而不改变它的物理内容，即它的吸收部分

$$A_b T_{\alpha\beta\mu}\propto\delta(q^2). \tag{11.67}$$

它是非零的，因为在渐近区内物理范围是 $q^2\geqslant0$，而前子又都是零质量的。$q^2=0$ 的点既在渐近区内，又在有限动量范围内。这样，在渐近区得到的(11.67)式，在有限动量范围内可以继续使用。实际上，振幅 $T_{\alpha\beta\mu}$ 是由(11.66)式对所有的 k_1、k_2 值给出

的，因为按照对称性论证，它必须有(11.29)的普遍形式。

由此往下的推理依据两个假定[14]：

a. 前子是禁闭的；

b. 手征对称性不是自发破缺的。

禁闭假定意味着，在有限动量范围内前子不可能做为物理态存在，因此不可能对 $T_{\alpha\beta\mu}$ 的吸收部分有贡献。这就是说，必定是物理的束缚态才有贡献。由于这个吸收部分只是在 $q^2=0$ 处不为零，所以必须存在零质量的物理束缚态。

这些无质量的束缚态不可能是自旋为0的粒子，因为倘若在这一模型中真有这样的粒子，它们就一定会成为与手征性破缺相关的戈德斯通粒子。但我们曾经说过，后者是不存在的[注c]。

反常极点也不可能来自自旋为1或更高数值的粒子，因为这样的粒子与外源只有微商耦合。于是，它们对三角图吸收部分的贡献在阈值处为零。然而，这个吸收部分却只在阈值处不为零。

剩下的唯一的可能性就是一个无质量的自旋为1/2的束缚态。正如我们已经知道的，它可以产生反常极点。

我们可以把 j^μ 和 j_5^μ 在电子态之间的矩阵元表示为

$$\begin{aligned}\langle e_2|j^\mu|e_1\rangle &= g_V\overline{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_1,s_1),\\ \langle e_2|j_5^\mu|e_1\rangle &= g_A\overline{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma^\mu\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_1,s_1),\end{aligned}\tag{11.68}$$

其中 $u(\boldsymbol{p},s)$ 是狄拉克旋量，g_V 和 g_A 是常数。为了使电子重新产生反常(11.66)式，必须满足

$$g_V^2g_A=N,\tag{11.69}$$

它是特霍夫特原理的一个具体的结果。在一个更现实的模型里，前子有多种味，上述条件被推广为前子多重态结构常数和束缚态

[注c]如果手征对称性是自发破缺的，则特霍夫特原理就会对有关的戈德斯通粒子与流 j_μ、j_5^μ 的耦合提供某些知识。把它用到QCD就会重新产生著名的 $\pi^0\to2\gamma$ 寿命的计算问题。我们将在12.4节讨论这个问题。

结构常数之间的关系式。那时，人们可以用它来考察一下哪一种类型的前子味结构可以产生出有着观测到的夸克和轻子[15]的多重态结构的束缚态。

考虑到特霍夫特原理的时空观点，计算(11.66)式的傅氏变换可以求得三个流的关联函数。

$$C_{\alpha\beta\mu}(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial r_\lambda}\delta^4(r)\right]\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}D_F(\rho),$$

$$r=\frac{1}{2}(x+y),\quad \rho=x-y, \tag{11.70}$$

其中 $D_F(\rho)$ 是零质量粒子的费曼传播子：

$$D_F(\rho)=-\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-iq\cdot\rho}}{q^2+i\varepsilon}. \tag{11.71}$$

$iD_F(\rho)$ 的虚部在光锥 $\rho^2=0$ 外面为零。因此，这个关联函数的虚部仅当 $x=y$ 和 $x^2=0$ 时不为零。这意味着为产生这种关联，必须有沿光锥传播的物理激发。这样一来，它们必定是无质量激发。考虑光锥上一条如图 11.10所示 OP 线。短程区域是 O 点附近的邻域，在那里，渐近自由告诉我们，无质量激发是自由前子。如果我们沿 OP 线离 O 充分远，则最终会超出禁闭尺度。在那个区域内无质量激发必须是束缚态——电子。

如果我们通过给前子以质量来扩展这一模型，则情况就会变得复杂了。那时单靠 QCD 的一些熟知的语言就不够了。复杂性在于仍保持在 $q^2=0$ 处的反常极点超出了物理区达到的范围，因而不会直接对 $T_{\alpha\beta\mu}$ 的吸收部分做出贡献。正如图 11.6 定性指给的那样，后者一般地对阈以上的所有的 q^2 都将取非零值。为了确定它，要求做动力学计算。特别是确定阈的位置变成了一个动力学问题，它或许比自由前子产生的运动学阈值要高一些，因为根据动力学考虑，在那个邻域里，吸收部分可能为零。这样一来，我们就不可能用任何简单的方法导出电子的质量。

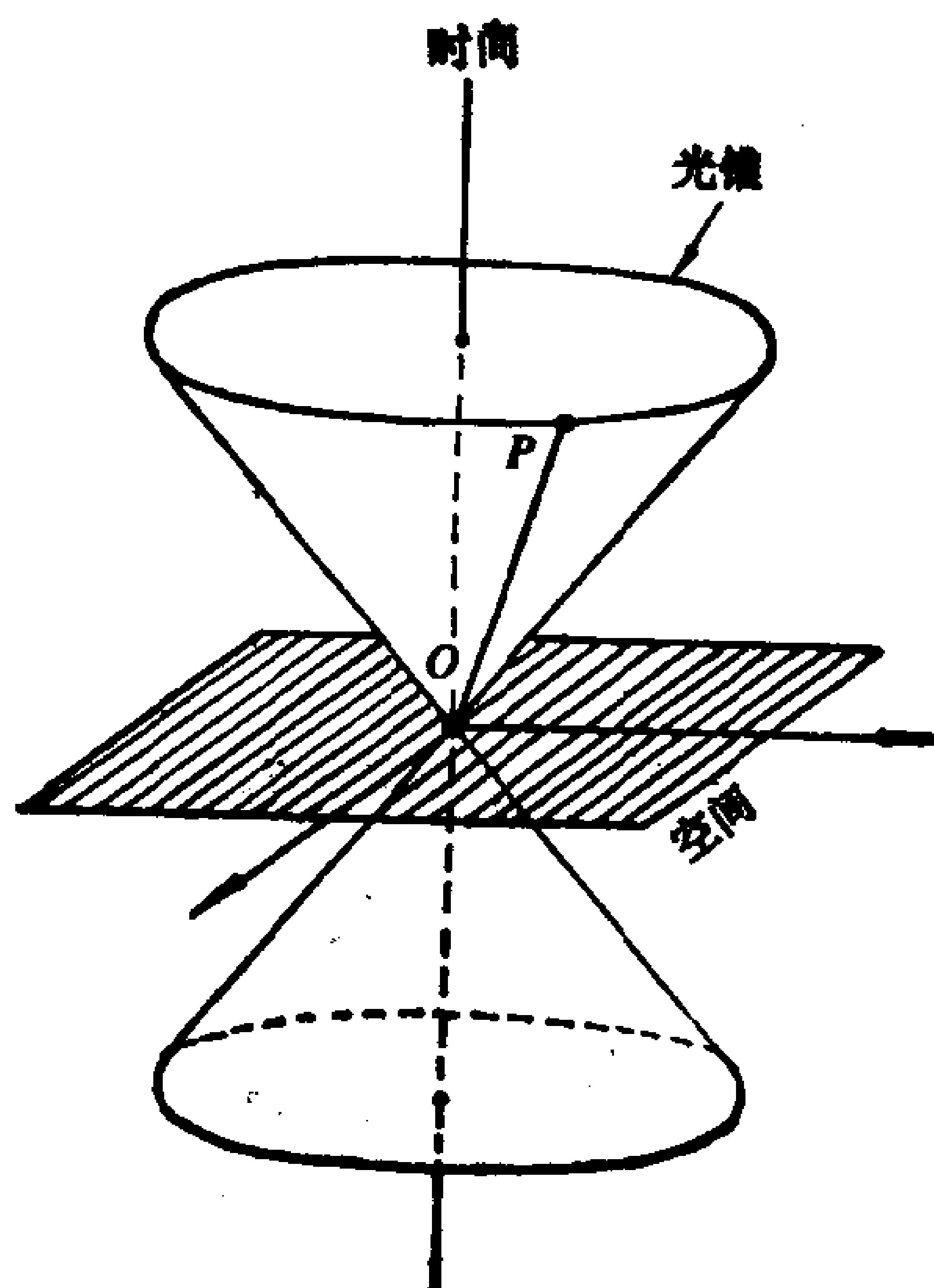


图11.10 特霍夫特原理的时空观点，必须存在沿光锥运动的无质量激发以解释由存在轴矢反常所暗示的三个流的关联函数。O附近，这些激发是前子，在P点，超出了禁闭尺度，它们是无质量的束缚态——电子

参考文献

[1]T. D. Lee and M. Nauenberg, *Phys. Rev.*, 133 B(1964) 1549. 他们还指出零质量旋量电动力学是一个病态理论。该理论的S矩阵元由于"质量奇异性"而成为无穷大。为了消除这些奇异性，人们必须对于适当选择的简并态统计系统（而不是纯态）定义S矩阵矩阵元。由于这个缘故，一个零质量的狄拉克理论永远要看做是一个有质量理论的极限。

[2]S. Adler, in *Lectures on Elementarg Particles and Quantum Field Theory*,（基本粒子和量子场论讲义）eds. S. Deser, M.Crisaru, and H. Pendleton(MIT Press, Cambridge, 1970).

[3]R. Jackiw, in S.B.Treiman, R.Jackiw, and D. J. Gross, *Lectures on Current Algebra and Its Applications*（流代数及其应用讲义）(Princeton University Press, Princeton, 1972).

[4]S. Adler, *Phys. Rev.*, 177, (1969)2426.
[5]J. S. Bell and R. Jackiw, *N. Cimento*, 60 *A*(1969)47.
[6]C. N. Yang. *Phys. Rev.*, 77 (1950) 242. L. D. Landau, *Dokl. Akad. Nauk.* (USSR)60(1948)207.
[7]S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, 182(1969)1517. 再请参看 A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, 29(1972)1198.
[8]W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, 184(1969)1848.
[9]A. D. Dolgov and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* B 27(1971) 525.
[10]关于色散关系和费曼图的解析性的参考书请看 R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. OLive, and J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*(Cambridge University Press, Cambridge, England, 1966).
[11]D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.* D 6(1972)477.
[12]这个名称是由 J. C. Pati, A. Salam, 和 J. Strathdee 在 *Phys. Letters*, 59 B(1975)265 中建议的.
[13]G. 't Hooft, in *Recent Development in Gauge Theories*, eds. G. 't Hooft et al, (Plenum Press, New York, 1980).
[14]更详细的讨论请看 Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, and S. Yankielowicz, *Nucl. Phys.* B 177(1981)157; S.Coleman and B. Grossman(to be publiShed).
[15]S. Dimopoulos, S. Raby, and L. Susskind, *Nucl. Phys.* B173(1980), 208.

第十二章　量子色动力学

12.1　一般性质

1. 拉格朗日密度

在第二章，我们曾讨论过引入“色”夸克的作为一个量子数的物理动机。通过把对称群$[SU(3)]_c$规范化，我们得到目前公认的强相互作用模型——量子色动力学（QCD）。

$[SU(3)]_c$的 8 个生成元，在基础表示中，由表2.2所列的盖尔曼矩阵$\lambda_a/2(a=1,\cdots,8)$ 来表示，它们的归一条件为

$$\mathrm{Tr}(\lambda_a,\ \lambda_b)=2\delta_{ab}. \tag{12.1}$$

规范场，称为“胶子场” (gluon field) ，用 $G_a^\mu(a=1,\cdots,8)$ 代表。我们使用以下符号（见第四章）

$$G^\mu(x)\equiv\frac{1}{2}\lambda_a G_a^\mu(x), \tag{12.2}$$

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}=\partial^\mu G^\nu(x)-\partial^\nu G^\mu(x)+ig_0[G^\mu(x),G^\nu(x)],$$

其中 g_0 是一个无量纲的数，它是未重整的规范耦合常数。

由旋量夸克场组成的物质场，用 $q(x)$统一代表，它的分量为$q_a^{fi}(x)$，其中

$i=1,2,3$　　（色指标：红，黄，绿），

$f=1,\cdots,6$　　（味指标：u、d、c、s、t、b），

$\alpha=1,\cdots,4$　　（旋量指标）.

通常，我们把旋量指标省掉，有时把所有指标都省掉。代替味指标，我们有时用下列惯用的名称来代表各种味的夸克场

u	d	c	s	t	b
(上)	(下)	(粲)	(奇)	(顶)	(底)
(up)	(down)	(charmed)	(stange)	(top)	(bottom)

顶夸克的存在至今还没有得到实验证实，但已被弱电相互作用的温伯格-萨拉姆模型的内在自洽性所暗示。可能还有一些别的味尚未发现。

QCD的完整拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\mathscr{F}_a^{\mu\nu}\mathscr{F}_{a\mu\nu} + \overline{q}(i\not{D} - M)q,$$

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_0G^\mu, \tag{12.3}$$

式中 M 为与色无关而用味指标表示的质量矩阵，将在12.6节详细讨论。这个理论是可重整的，但我们将不给出证明[1]。

2. 费曼规则

入们一般都相信夸克和胶子是被禁闭的，这就是说，带色的态在希尔伯特空间的物理区中是不存在的。于是，对于QCD的S矩阵，其基矢不是由单个夸克或胶子态所组成的，而是由包含物理强子的色单态所组成。然而，作为夸克和胶子场算符编时乘积真空期待值的格林函数，我们总是可以定义的。夸克禁闭只不过意味着夸克和胶子的质壳不存在。于是，至少在形式上，我们可以用夸克和胶子的传播子和顶点来定义这些格林函数的费曼图展开。

连通格林函数的生成泛函由下式给出（见第八章）

$$\exp iW[J,K] = \mathscr{N}\int (DG)(D\bar{q})(Dq)(D\eta^*)(D\eta)$$

$$\cdot \exp i\int d^4x[\mathscr{L}_{eff} + J_a^\mu G_{a\mu} + (\overline{K}q) + (\bar{q}K)], \tag{12.4}$$

式中 $J_a^\mu(x)$ 是c数矢量外源，$K(x)$ 是反对易c数旋量外源。在一般的洛仑兹规范中，有效拉格朗日密度 $\mathscr{L}_{eff}$ 为

$$\mathscr{L}_{eff} = \mathscr{L} + \frac{1}{2\alpha}(\partial^{\mu}G_{a\mu})(\partial^{\nu}G_{a\nu})$$

$$+ \frac{1}{2}\eta_a^*(\delta_{ab}\Box^2 + g_0 f_{abc}G_c^{\mu}\partial_{\mu})\eta_b, \tag{12.5}$$

式中 α 是规范参量（见(8.62)），η_a^* 和 η_a 是反对易c数鬼场，f_{abc}是表 2.3 给出的 $SU(3)$结构常数。

把有效拉格朗日密度分成一个“自由的”部分和一个“相互作用”部分

$$\mathscr{L}_{eff} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}'. \tag{12.6}$$

自由的拉格朗日密度取为

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}G_{a\mu}\left[g^{\mu\nu}\Box^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\partial^{\mu}\partial^{\nu}\right]G_{a\nu}$$

$$+ i\overline{q}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}q + \frac{1}{2}\eta_a^*\Box^2\eta_a. \tag{12.7}$$

相互作用拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}'_{胶子} + \mathscr{L}'_{夸克} + \mathscr{L}'_{鬼} \tag{12.8}$$

$$\mathscr{L}'_{胶子} = \frac{1}{2}g_0 f_{abc}(\partial^{\mu}G_a^{\nu} - \partial^{\nu}G_a^{\mu})G_{b\mu}G_{c\nu}$$

$$- \frac{1}{4}g_0^2 f_{abc}f_{ab'c'}G_b^{\mu}G_c^{\nu}G_{b'\mu}G_{c'\nu}, \tag{12.9}$$

$$\mathscr{L}'_{夸克} = -\frac{1}{2}g_0(\overline{q}\gamma_{\mu}\lambda_a q)G_a^{\mu}, \tag{12.10}$$

$$\mathscr{L}'_{鬼} = \frac{1}{2}g_0 f_{abc}(\eta_a^*\partial_{\mu}\eta_b)G_c^{\mu}. \tag{12.11}$$

由上述这些公式可以看出格林函数的费曼规则：

胶子传播子　$a \sim\!\overset{k}{\sim}\!\sim b$　$\delta_{ab}\dfrac{-i}{k^2}\left[g^{\mu\nu} - (1-\alpha)\dfrac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}\right]$

夸克传播子　$j',f' \overset{p}{\longrightarrow} j,f$　$\delta_{jj'}\delta_{ff'}\dfrac{i}{\not{p} - M_2}$　j = 色　f = 味

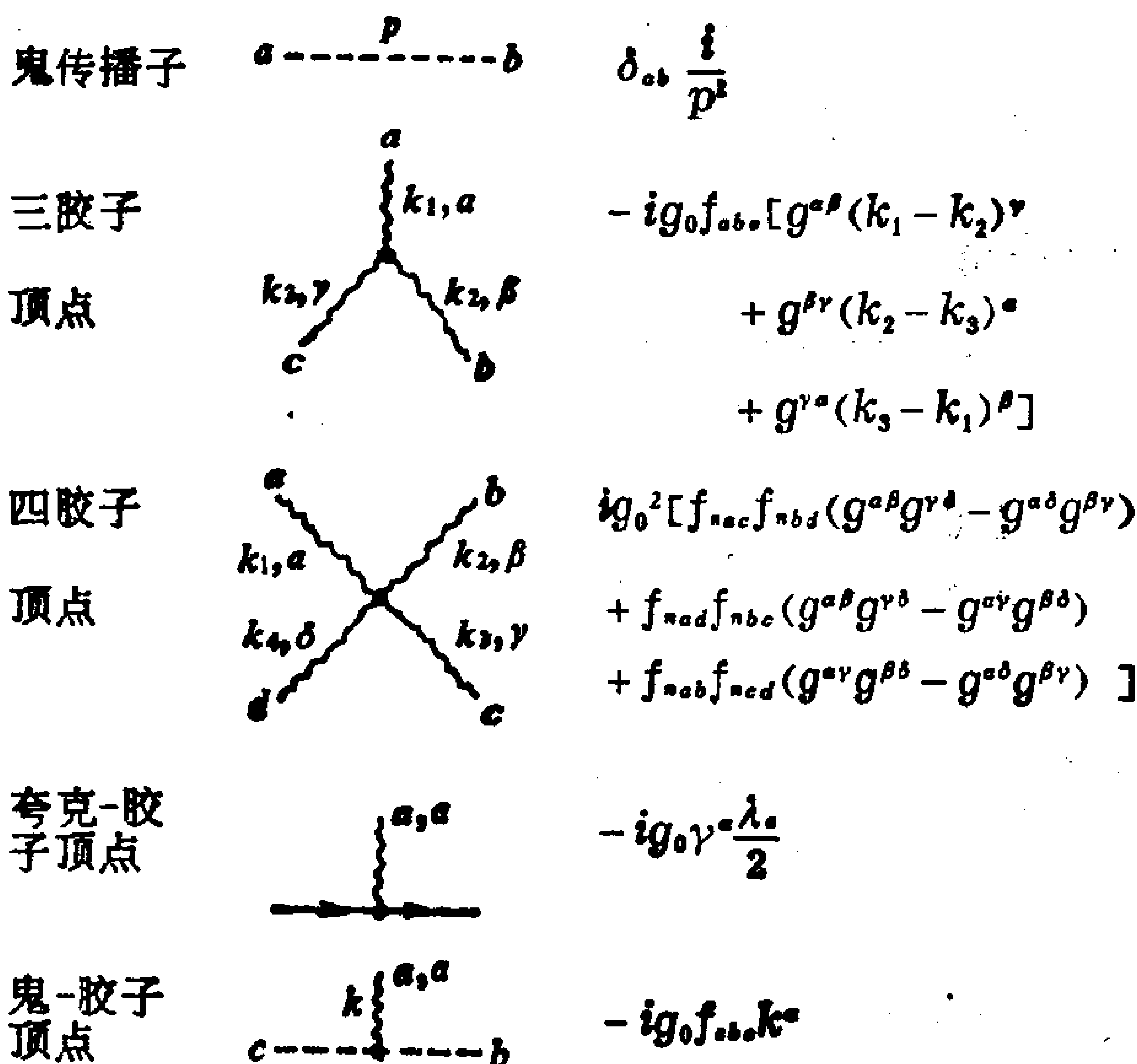


图 12.1 QCD的费曼规则.所有的胶子动量均指向顶点

为了举例说明在推导费曼规则时的一些综合考虑，我们讨论三胶子顶点，它起源于（12.9）式中的第一项。假定三条胶子外线有下列标号：

色指标：　　a、b、c，

动量：　　k_1，k_2，k_3，

极化指标：　α，β，γ，

其中所有的动量均指向图中的顶点。由于 f_{abc} 对其指标是反对称的，所以（12.9）式的第一项可以改写成

$$g_0f_{a'b'c'}(\partial^\mu G^\nu_{a'})G_{b'\mu}G_{c'\nu},$$

我们必须在上述求和中挑出所有那些对于顶点图有贡献的项。首先考虑$a'=a$。然后，或者取$b'=b$，$c'=c$，或者取$b'=c$，$c'=b$。这两种可能性给出贡献

$$-ig_0f_{abc}(k_1{}^\beta g^{\alpha\gamma}-k_1{}^\gamma g^{\alpha\beta})\ .$$

换成取$a'=b$及$a'=c$，相应地得到另外两项贡献，把它们与上述贡献相加，即可求得完整的顶点。

3．夸克-胶子相互作用

我们把盖尔曼矩阵重新组合，得到下列一组矩阵

$$\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$\tau_{12}\equiv\frac{1}{2}(\lambda_1+i\lambda_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_{13}\equiv\frac{1}{2}(\lambda_4+i\lambda_5)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\tag{12.12}$$

$$\tau_{23}\equiv\frac{1}{2}(\lambda_6+i\lambda_7)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

矩阵τ_{ij}是色“提升”（raising）矩阵，它把一个j色夸克变成i色。其厄米共轭$\tau_{ij}^+=\tau_{ji}$起着相反的作用。相应地，定义

$$\begin{aligned}&A^\mu\equiv G_3^\mu,\ B^\mu\equiv G_8^\mu,\\&X^\mu\equiv 2^{-1/2}(G_1^\mu+iG_2^\mu),\\&Y^\mu\equiv 2^{-1/2}(G_4^\mu+iG_5^\mu),\\&Z^\mu\equiv 2^{-1/2}(G_6^\mu+iG_7^\mu).\end{aligned}\tag{12.13}$$

于是

$$\mathscr{L}'_{夸克}=-\frac{g_0}{2}\overline{q}(\lambda_3 \not{A}+\lambda_8\not{B})q\tag{12.14}$$

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}[\overline{q}(\tau_{21}\not{X}+\tau_{31}\not{Y}+\tau_{32}\not{Z})q+\text{c.c.}],$$

它表明，夸克有两种“荷”：与$\lambda_3/2$的本征值相应的色“同位旋

荷”和与$\lambda_8/2$的本征值相应的色“超荷”．胶子X、Y、Z也带有这两种荷，因为一个夸克可以通过吸收或放出一个这样的胶子而改变色，如图12.2所示．夸克和胶子的荷的规定列在表12.1中．

表12.1　色荷

所有的荷都以g_0为单位

Q_A=色同位旋荷（A场的源）　Q_B=色超荷（B场的源）

		Q_A	Q_B
夸克	1　红	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	2　黄	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	3　绿	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
荷电胶子	X	−1	0
	Y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Z	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

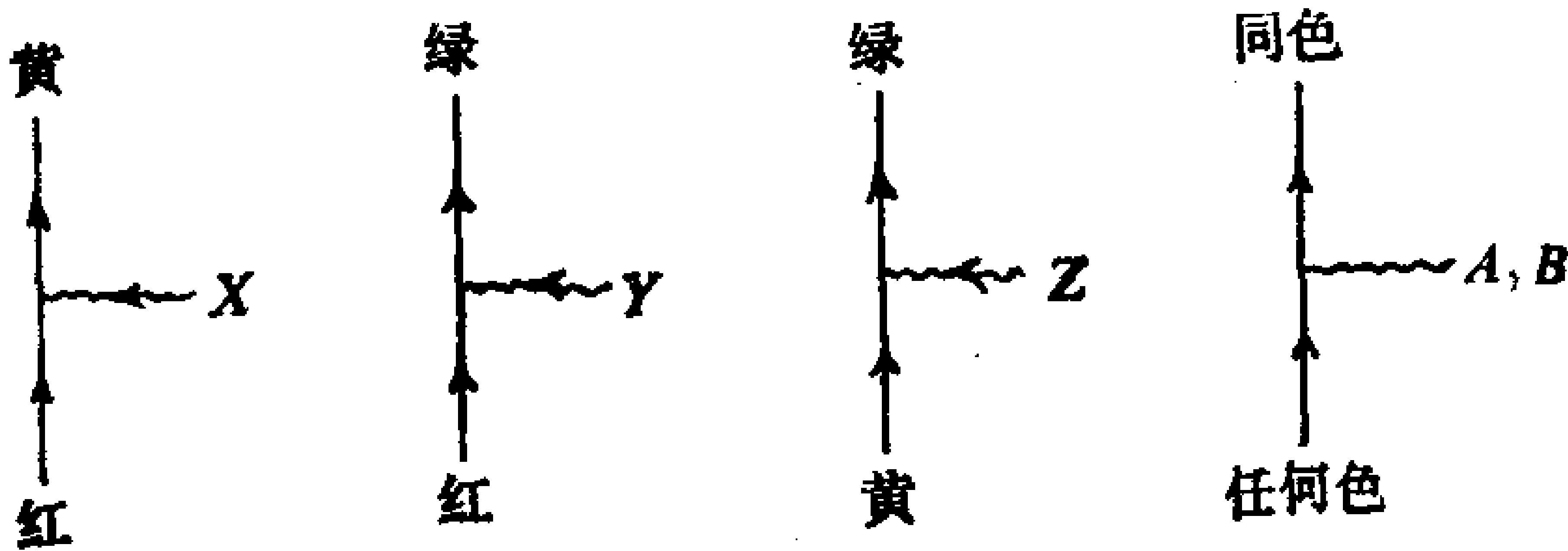


图12.2　夸克-胶子的相互作用

4．胶子的自相互作用

在我们考察QCD中胶子自相互作用之前，先来研究一下在更简单的情况下同样的问题是很有益处的，这就是$SU(2)$纯规范

理论。它有规范场 G_1^μ，G_2^μ，G_3^μ 和场张量

$$\mathscr{F}_a^{\mu\nu}=\partial^\mu G_a^\nu-\partial^\nu G_a^\mu-e\varepsilon_{abc}G_b^\mu G_c^\nu \quad (a=1,\ 2,\ 3)\ . \tag{12.15}$$

(12.13) 式的模拟是

$$A^\mu \equiv G_3^\mu, \tag{12.16}$$
$$X^\mu \equiv 2^{-1/2}(G_1^\mu+iG_2^\mu),$$

它定义了一个实“光子”场 A^μ 和一个带电的矢量玻色子场 X^μ。利用四维张量的简写符号，借助于 A^μ 和 X^μ 把场张量写出来，我们有

$$\mathscr{F}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(D\times X+\text{c.c.}),$$
$$\mathscr{F}_2=\frac{1}{i\sqrt{2}}(D\times X-\text{c.c.}), \tag{12.17}$$
$$\mathscr{F}_3=F+ieX^*\times X,$$

式中

$$F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu,$$
$$D^\mu\equiv\partial^\mu-ieA^\mu. \tag{12.18}$$

于是，场 X^μ 带有电荷 $-e$。拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=-\frac{1}{4}\mathscr{F}_a^{\mu\nu}\mathscr{F}_{a\mu\nu}\\&=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-ieF^{\mu\nu}X_\mu^*X_\nu\\&\quad-\frac{1}{2}(D^\mu X^\nu-D^\nu X^\mu)^*(D_\mu X_\nu-D_\nu X_\mu)\\&\quad+\frac{1}{2}e^2[(X^*\cdot X)^2-(X\cdot X)^*-(X\cdot X)].\end{aligned} \tag{12.19}$$

除了最后一项之外，这就是带有“反常”磁矩的零质量矢量电动力学的拉氏密度。

最后一项，即带电场的四次自相互作用项，标志着零质量矢量电动力学与完全的 $SU(2)$ 规范理论的差别，没有它，这个理论

仅在一个更小的规范群$U(1)$之下是不变的。由于电荷-电荷散射（图12.3(a)）的骨架图有对数发散，这样的理论还是不可重整的。四次自相互作用（图12.3(b)）提供了必要的抵消项，消除了这些发散，使该理论成为可重整理论。这个相互作用是标量电动力学中$\lambda(\phi^*\phi)^2$的模拟，但由于自旋的约束，它的系数不是一个独立的耦合常数。

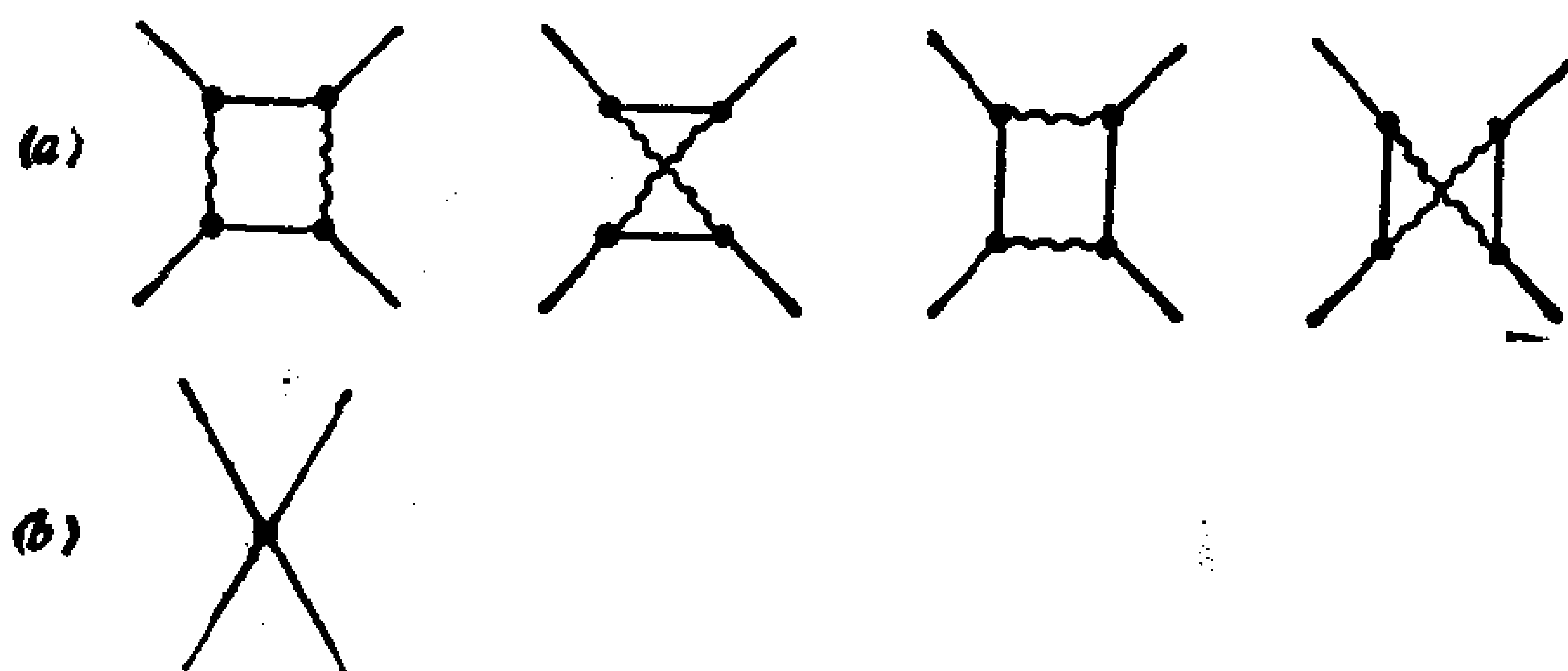


图 12.3 (a)对于带电的矢量玻色子，通过交换光子而散射的对数发散骨架图；b)抵消(a)中发散的四次自相互作用

拉格朗日密度（12.9）式中

$$-ieF^{\mu\nu}X_\mu^*X_\nu \qquad (12.20)$$

项对于$U(1)$规范不变性并不是必要的。从电动力学观点来看，它似乎是一个"非最小"(non-minimal)相互作用项，在轨道磁矩之外产生了一个"反常"磁矩。如果这个带电矢量场是有质量的，那么由此而产生的总磁矩就会相应于回磁比（gyromagnetic ratio）为$g=2$（见(6.55)）。下一节我们将证明，要使一个有质量的带电矢量理论具有零质量极限，则$g-2=0$是必要条件。从$SU(2)$规范不变性观点来看，（12.20）这一项是最小相互作用的一部分，因为它来自于（12.17）式中$\mathscr{F}_3^{\mu\nu}$的两项之间的叉乘。于是，$g-2=0$是自然的，而且是有运动学起源的（恰如狄拉克方程中的那样）。的确，对于内部自洽性，它是必需的：假如$g-2\neq0$，那么A场的极化张量就会是二次发散而不是对数发散的，这将破坏可重整性。

我们现在回到 QCD 上来。按照（12.13）式，有 A 和 B 两个“光子”场，它们分别与色同位旋和色超荷耦合。有 X，Y，Z 三个带电的矢量场，为了用这些新的场表示胶子场张量，把所有的结构常数 f_{abc} 编排成一种便于查找的明显形式，是很有帮助的。图12.4提供了一种这样的形式。我们直接得到下列表达式（仍采用简写的张量符号）：

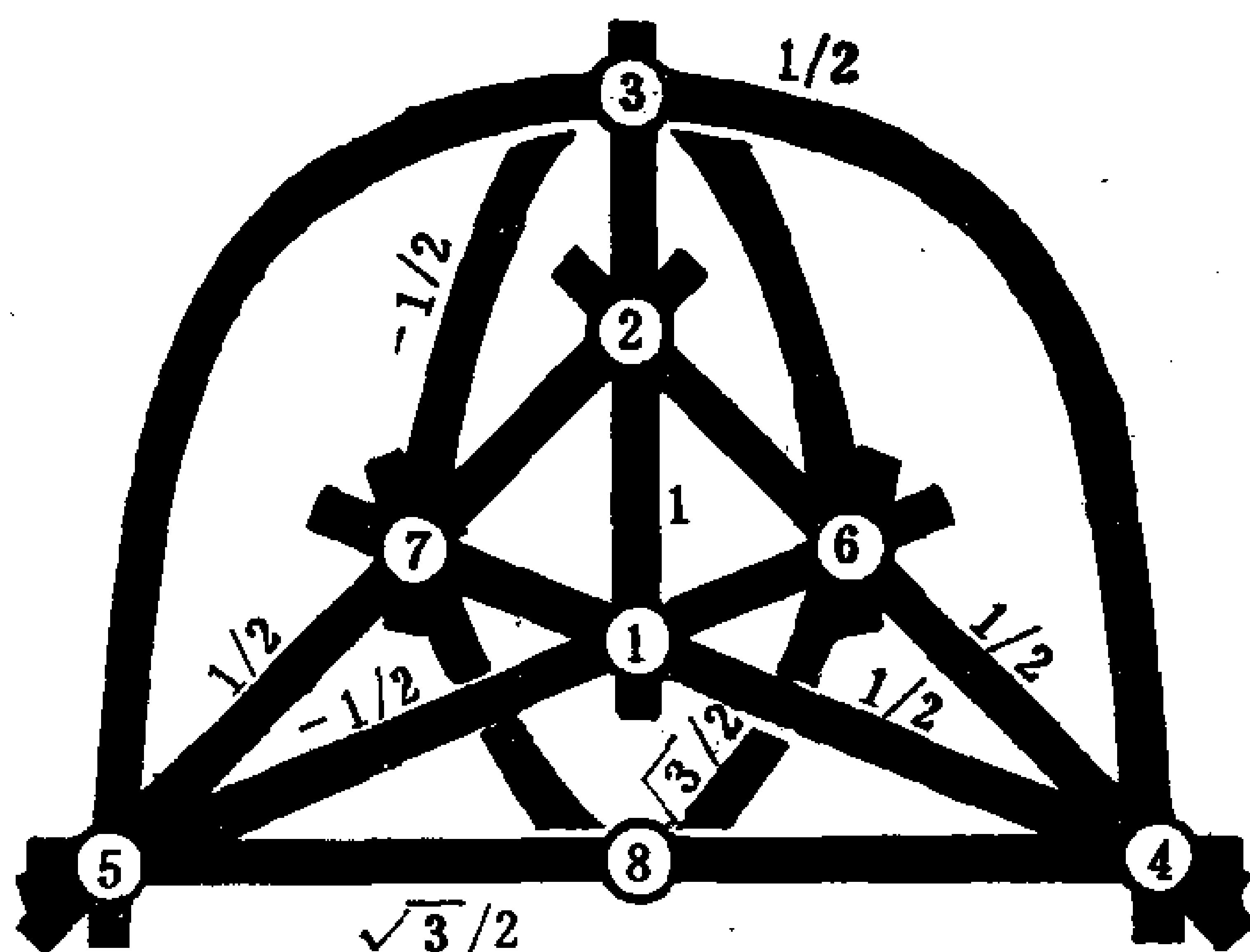


图 12.4　$SU(3)$ 结构常数 f_{abc}。在图上用黑带子连接起来的 abc 这三个数的任何一种组合，都相应有一个非零的 f_{abc} 元素。黑带子上标的数就是 $a>b>c$ 的次序下 f_{abc} 的值。只要注意到 f_{abc} 对它的三个指标是完全反对称的，就可以求得 f_{acb} 等的数值

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_3 &= \partial\times A + ig_0\left(X^*\times X + \frac{1}{2}Y^*\times Y + \frac{1}{2}Z^*\times Z\right),\\
\mathscr{F}_8 &= \partial\times B + ig_0\frac{\sqrt{3}}{2}(Y^*\times Y + Z^*\times Z),\\
\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{F}_1 + i\mathscr{F}_2) &= D\times X + \frac{g_0}{\sqrt{2}}Y\times Z^*,\\
\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{F}_4 + i\mathscr{F}_5) &= D\times Y + \frac{ig_0}{2}Z\times X, \qquad (12.21)\\
\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{F}_6 + i\mathscr{F}_7) &= D\times Z + \frac{g_0}{\sqrt{2}}X^*\times Y,
\end{aligned}$$

式中，协变微商定义为

$$
\begin{aligned}
DX &\equiv (\partial - ig_0 A) X, \\
DY &\equiv \left(\partial - \frac{ig_0}{2} A - ig \frac{\sqrt{3}}{2} B\right) Y, \qquad (12.22) \\
DZ &\equiv \left(\partial + \frac{ig_0}{2} A - ig \frac{\sqrt{3}}{2} B\right) Z,
\end{aligned}
$$

由这些式子，我们可以直接看出各种荷的值，从而证实了表12.1中的规定。

我们把纯QCD的拉格朗日密度的结构表示成如下形式

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{纯\mathrm{QCD}} &= -\frac{1}{4} \mathscr{F}_a^{\mu\nu} \mathscr{F}_{a\mu\nu} \\
&= \mathscr{L}_{\mathrm{kin}} + \mathscr{L}_{磁矩} + \mathscr{L}_{\mathrm{int}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{\mathrm{kin}} &= -\frac{1}{4}(\partial \times A)^2 - \frac{1}{4}(\partial \times B)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[|D \times X|^2 + |D \times Y|^2 + |D \times Z|^2\right], \\
\mathscr{L}_{磁矩} &= -ig_0(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\left(X_\mu^* X_\nu + \frac{1}{2} Y_\mu^* Y_\nu + \frac{1}{2} Z_\mu^* Z_\nu\right) \\
&\quad - ig_0 \frac{\sqrt{3}}{2}(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu)(Y_\mu^* Y_\nu + Z_\mu^* Z_\nu). \qquad (12.23)
\end{aligned}
$$

单取 $\mathscr{L}_{\mathrm{kin}}$项描写一种三个荷电矢量玻色子 X、Y、Z 与两个“光子”场 A、B 以最小电磁方式相互作用的理论。$\mathscr{L}_{磁矩}$项使每个带电矢量玻色子对于 A 和 B 这两种场都具有色回磁比 $g=2$。拉格朗日密度中其余各项都归并到$\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$中，我们不再写出。它包括在同一点至少含有三个带电矢量玻色子的相互作用，而且使该理论可重整化。

12.2 色回磁比

我们来讨论色回磁比，前面关于胶子相互作用的性质中曾提

过它，我们在下一节讨论渐近自由也与它有关系。

作为一个假想实验，考虑带荷胶子 X、Y、Z 在一个外部色磁场中的行为，而这个外磁场是与 A 或 B 胶子场相联系的。如果除了与引进的这个外场的相互作用之外，略去所有的胶子相互作用，那么我们就把问题简化成一些零质量的带荷矢量玻色子与一个外部阿贝尔磁场的相互作用问题。只是在使矢量玻色子带有色荷这一点上，才考虑了 QCD 的非阿贝尔性质。

我们先考虑一个有质量、荷电、有自旋的粒子，其电荷为 e，质量为 m，并与一个弱的均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 相互作用。设 $\boldsymbol{\xi}$ 为平均自旋，它定义为单粒子态静止参考系中自旋算符的期待值。按照惯例，回磁比 g 通过方程式

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}=g\frac{e}{2m}\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{B} \tag{12.24}$$

来定义。我们尝试把这个方程式变换到一个任意的洛仑兹参考系中，然后取 $m\to0$ 的极限。如果极限存在，则由此得到的方程式就定义了零质量情况下的 g。

为实现这一目的，我们定义极化四维矢量 S^μ 为

$$S^\mu\equiv(0,\boldsymbol{\xi})\quad(\text{在静止坐标系})\text{.} \tag{12.25}$$

设 u^μ 为四维速度（一个波包中心的速度，它的运动可以经典地处理）

$$u^\mu\equiv\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1,\boldsymbol{v}), \tag{12.26}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是三维速度。在每一个洛仑兹参考系中，我们有 $S\cdot u=0$，或

$$S^0=\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{12.27}$$

在静止参考系中求出上式对时间的微商后，与（12.24）式合在一起，给出静止参考系中 S^μ 的运动方程

$$\frac{dS^0}{dt}=\boldsymbol{S}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\quad(\text{在静止坐标系})\text{,}$$

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}=g\frac{e}{2m}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}\text{（在静止坐标系）}. \qquad (12.28)$$

上式推广为协变形式[2]，则得到

$$\frac{dS^\mu}{d\tau}=g\frac{e}{2m}[F^{\mu\nu}S_\nu+u^\mu(S\cdot F\cdot u)]-u^\mu\left(\frac{du^\nu}{d\tau}S_\nu\right), \qquad (12.29)$$

式中τ是原时 (Proper time)

$$d\tau=\frac{dt}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad (12.30)$$

电磁张量$F^{\mu\nu}$通过 (3.28) 式与电场和磁场联系起来。我们采用了符号 $(S\cdot F\cdot u)=S_\alpha F^{\alpha\beta}u_\beta$。注意到 (12.29) 式的右边包含所有可能有贡献的四维矢量，而且在没有电场的静止参考系中该式变成 (12.28) 式，我们可以证明 (12.29) 式。在均匀电磁场中，u^μ服从下列运动方程：

$$\frac{du^\mu}{d\tau}=\frac{e}{m}F^{\mu\nu}u_\nu. \qquad (12.31)$$

把它代入到 (12.29) 式，我们得到

$$\frac{dS^\mu}{d\tau}=\frac{e}{2m}[gF^{\mu\nu}S_\nu+(g-2)u^\mu(S\cdot F\cdot u)]. \qquad (12.32)$$

按一个固定观察者的时间t，上式写成

$$\frac{dS^\mu}{dt}=\frac{g}{2}\frac{e}{E}F^{\mu\nu}S_\nu+\frac{e}{2m}(g-2)v^\mu(S\cdot F\cdot v), \qquad (12.33)$$

式中 $v^\mu\equiv(1,\boldsymbol{v})$，$E$ 是粒子的能量

$$E\equiv\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \qquad (12.34)$$

当 $m\to0$ 时，仅当

$$g-2=0, \qquad (12.35)$$

(12.33) 式趋于一个严格确定的极限。所以对于一个有自旋、荷电、零质量粒子，(12.35) 式是一个必要的约束。

在不存在电场的情况下，(12.32) 式的空间分量为

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}=\frac{g}{2}\frac{e}{E}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}-\frac{e}{2m}(g-2)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}).\quad(12.36)$$

瞬时自旋$\boldsymbol{\zeta}$与$\boldsymbol{S}$通过一个洛仑兹变换联系起来，因而可以证明，$\boldsymbol{\zeta}$服从运动方程[3]

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt}=\left[\frac{e}{E}+\frac{e}{2m}(g-2)\right]\boldsymbol{\zeta}\times\boldsymbol{B}+$$

$$+\frac{e}{2m}(g-2)\frac{E}{E+m}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\zeta}.\qquad(12.37)$$

对于$g-2=0$，$\boldsymbol{\zeta}$和$\boldsymbol{S}$变成完全一样了，这时有

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt}=\frac{e}{E}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}.\qquad(12.38)$$

它是描写一个零质量荷电粒子自旋进动的方程式。

由上述讨论可见，胶子X、Y、Z都有色回磁比$g-2=0$。由于狄拉克方程的缘故，夸克也都有$g-2=0$（这里的$g-2$的值只涉及到“运动学”值，不包括辐射修正）。

12.3 渐近自由

1. 跑动耦合常数

QCD的跑动耦合常数是通过重整化的胶子传播子来定义的[注a]。未重整的完全传播子可以表示成以下形式

$$D'^{\mu\nu}_{ab}(k)=\delta_{ab}\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)\frac{d'(k^2/\Lambda^2,\alpha_0)}{ik^2}\qquad(12.39)$$

$$+(\text{规范相关项}),$$

式中Λ是截断动量，而

$$\alpha_0\equiv g_0^2/4\pi.\qquad(12.40)$$

设

[注a] 凡是这里未加充分解释的概念，请参看第九章。

$$d'\left(\frac{k^2}{\Lambda^2},\alpha_0\right)=Z\left(\frac{\lambda^2}{\Lambda^2},\ \alpha_0\right)d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\alpha_\lambda\right), \tag{12.41}$$

即可求得重整化后的传播子，式中 d 是一个有限的函数，而

$$\alpha_\lambda\equiv\alpha_0 Z\left(\frac{\lambda^2}{\Lambda^2},\ \alpha_0\right). \tag{12.42}$$

我们把这个值称为相应于重整化点 λ 的跑动耦合常数[注b]. d 的定义由归一条件

$$d(1,\alpha_\lambda)=1 \tag{12.43}$$

唯一地决定。从 (12.41) 式和 (12.42) 式，我们看到

$$\alpha_\lambda d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right)=\alpha_0 d'\left(\frac{k^2}{\Lambda^2},\ \alpha_0\right). \tag{12.44}$$

于是，左边是一个重整化群不变量

$$\alpha_\lambda d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right)=\alpha_\nu d\left(\frac{k^2}{\nu^2},\ \alpha_\nu\right), \tag{12.45}$$

式中 λ 和 ν 是两个任意的重整化点. 设 $\nu^2=k^2$，我们求得

$$\alpha_k=\alpha_\lambda d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right). \tag{12.46}$$

盖尔曼-骆 (GL) 函数由

$$\beta(\alpha_\lambda)\equiv\lambda^2\frac{d}{d\lambda^2}\left[\alpha_0 Z\left(\frac{\lambda^2}{\Lambda^2},\ \alpha_0\right)\right] \tag{12.47}$$

定义，式中的右边借助于 (12.42) 式可以重新表示为 α_λ 的函数。在重整化点 λ 的改变下，α_λ 按照下式变化

$$\frac{d\alpha_\lambda}{d\ln(\lambda)^2}=\beta(\alpha_\lambda). \tag{12.48}$$

(12.44) 式的右边是 α_0 的一个幂级数，最低次项是 α_0^2。因此，GL 函数的幂级数展开有下列形式

$$\beta(\alpha)=\beta_0\alpha^2+\beta_1\alpha^3+\cdots. \tag{12.49}$$

格罗斯 (Gross) 和威尔切克 (Wilczek)[4]，波利查 (Politzer)[5]

[注b] Λ^2 和 λ^2 都是负数，它们是欧氏动量的平方不变质量. 极限 $\lambda\to\infty$ 被理解为意味着 $-\lambda^2\to\infty$。

最早指出$\beta_0<0$，因而暗示着

$$\alpha_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0. \tag{12.50}$$

这个结果意味着，例如，在无穷大动量极限下，由单胶子交换引起的两个夸克之间的相互作用为零。这种现象称为“渐近自由”，为电子-质子深度非弹性散射的部分子模型提供了一个基础。

利用（12.49）式中的最低级项，从（12.48）式求得

$$\frac{1}{\alpha_k}=\frac{1}{\alpha_\lambda}-\beta_0\ln\frac{k^2}{\lambda^2}+O(\alpha_\lambda), \tag{12.51}$$

除了该式在$k\to\infty$的极限下成为准确的等式这一点之外，它与量子电动力学中的（9.18）式是完全类似的。利用（12.46）式，我们还可以写出

$$d\left(\frac{k^2}{\lambda^2},\ \alpha_\lambda\right)=1-\beta_0\alpha_\lambda\ln\frac{k^2}{\lambda^2}+O(\alpha_\lambda^2). \tag{12.52}$$

通过计算胶子传播子的费曼图[4]，可以直接从（12.47）式得到GL函数。最低阶系数β_0可以从图12.5所示的费曼图求得，其结果为

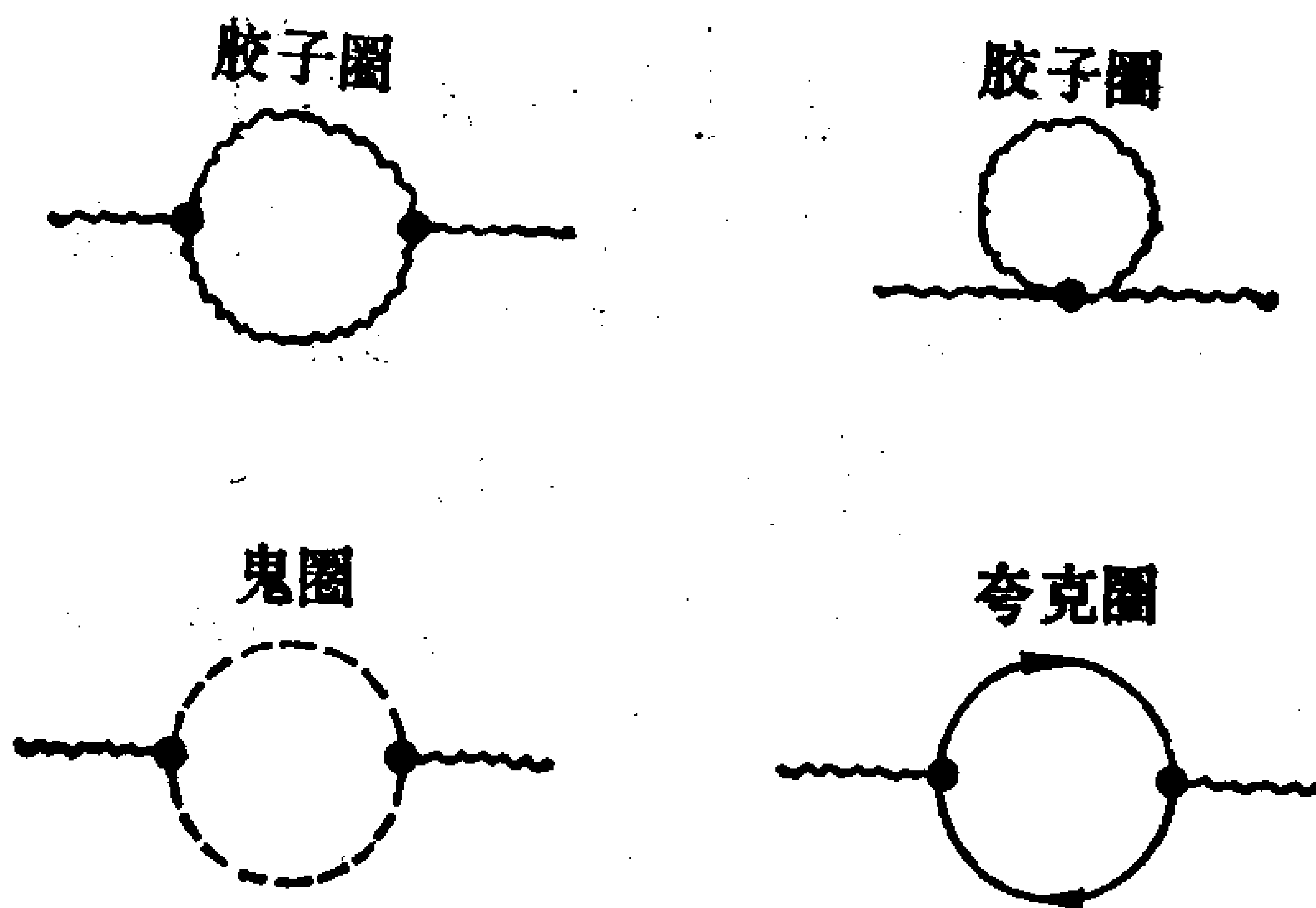


图12.5　对GL函数有贡献的最低阶费曼图

$$\beta_0=-\frac{1}{6\pi}\left(\frac{33}{2}-N_f\right), \tag{12.53}$$

式中 N_f 是夸克味的数目。夸克的贡献是把量子电动力学中的值 $(3\pi)^{-1}$乘上$N_f/2$（见(9.103)）[注c]。为了使 β_0 是负值，必须使胶子自相互作用占优势，这要求

$$N_f<17。\tag{12.54}$$

下一个系数由[6]

$$\beta_1=-\frac{1}{8\pi^2}\left(51-\frac{91}{3}N_f\right)\tag{12.55}$$

给出。

我们注意到，(12.51) 式容许有解

$$\alpha_k=-\frac{1}{\beta\ln(k^2/\overline{\Lambda}^2)},\tag{12.56}$$

式中$\overline{\Lambda}^2$是一个任意的标度参量，用QCD的预言去符合电子-质子深度非弹性散射实验数据可以确定这个参量的数值。现有的数据相应于$-k^2$在 10 到 100 $(\mathrm{GeV})^2$ 之间，用 $\overline{\Lambda}\sim0.5\,\mathrm{GeV}$[7] 可以与它们符合。对于$N_f=6$，这个结果给出在$(-k^2)=(10\mathrm{GeV})^2$处$\alpha_k\cong0.3$。

2。真空作为磁介质

为了证实有渐近自由，只需知道β_0，我们将利用尼尔森(Nielsen)[8]给出的基本方法把它算出来。在这个方法中，人们把真空态看作一个磁介质，通过这个介质对外磁场的响应寻求β_0。这个方法适用于任何场论，而且导致这样一种有趣的观点：渐近自由是兰道的抗磁性与泡利的顺磁性竞争的结果，并且与该理论中场

[注c] 因子 1/2 来源如下。为了求得夸克对β_0的贡献，只要考虑 A 场带有单夸克圈的自能图即可，对任何给定的一种味，从表12.1可见，两种色有贡献，它们的电荷都是$\frac{1}{2}$，于是，$2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$。考虑 B 场可以得到同样的结果，因为正如由表12.1可见，$\Sigma Q_A^2=\Sigma Q_B^2$。

的自旋有严格的依赖关系。我们用约翰逊(Johnson)[9]给出的解释来阐述这一观点。

在真空中放两个静态荷（同位旋荷或超荷），它们之间的色静电势 V 的傅氏变换为$V(k)$，k是类空动量。$V(k)$由跑动耦合常数α_k确定（见(9.20)式）

$$V(k)=\frac{\alpha_k}{k^2}, \tag{12.57}$$

根据（12.46）式，我们写成

$$\alpha_k=\alpha_\Lambda d\left(\frac{k^2}{\Lambda^2},\alpha_\Lambda\right), \tag{12.58}$$

并取$\Lambda\to\infty$。把Λ看成截断，α_Λ看成裸耦合常数。真空的介电常数可以定义为

$$\varepsilon_\Lambda(k)\equiv 1/d\left(\frac{k^2}{\Lambda^2},\alpha_\Lambda\right). \tag{12.59}$$

用下式引入电极化强度 $P_\Lambda(k)$

$$\varepsilon_\Lambda(k)=1+P_\Lambda(k), \tag{12.60}$$

则从（12.52）式求得

$$P_\Lambda(k)=\beta_0\alpha_\Lambda\ln\frac{\Lambda^2}{k^2}+O(\alpha_\Lambda{}^2). \tag{12.61}$$

于是，渐近自由意味着真空是具有负的电极化强度的介质。

在一个洛仑兹不变的理论中，介电常数和磁导率互为倒数[注d]。因此，后者由

$$\mu_\Lambda(k)=d\left(\frac{k^2}{\Lambda^2},\alpha_\Lambda\right) \tag{12.62}$$

给出。由下式引入真空的磁化率 (k)

$$\mu_\Lambda(k)=1 \qquad {}_\Lambda(k), \tag{12.63}$$

我们得到

[注d] 这是因为在QCD真空中光速是$[\varepsilon_\Lambda(k)\mu_\Lambda(k)]^{-\frac{1}{2}}$。

$$\chi_A(k) = -\beta_0\alpha_A \ln\frac{\Lambda^2}{k^2} + O(\alpha_A{}^2). \qquad (12.64)$$

顺磁性相应于$\beta_0<0$（渐近自由），而抗磁性相应于$\beta_0>0$。

为了计算 χ_A，我们先来计算存在着与中性胶子场A或B相联系的外部色磁场的情况下，真空的能量。在α_A的最低阶近似下，所有的夸克和胶子除了与外场的作用之外都可作为自由粒子处理。理论的非阿贝尔性质仅表现在胶子带有色荷这件事上。不同色和味的夸克以及带荷的胶子对于磁化率的贡献是独立的而且是可加的。

我们只需考虑下列典型体系：一个荷电的零质量自由场（玻色子或费米子），电荷为e，自旋为S，与一个弱的均匀外磁场发生相互作用。单粒子能量是单粒子哈密顿量H的本征值，它的平方为

$$H^2 = |\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}|^2 - 2e\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B}, \qquad (12.65)$$

式中$\boldsymbol{p} = -i\nabla$，而$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$是外磁场。$\boldsymbol{S}$的各分量都是自旋矩阵，每个矩阵都只有两个可能的本征值$\pm S$。（例如，对于自旋为1/2的情况，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$）。（12.65）式中的最后一项引入的目的是要给出运动方程

$$[\boldsymbol{S}, H^2] = 2ie\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{B}, \qquad (12.66)$$

它的单粒子期待值导致（12.38）式。

选取$\boldsymbol{B}$为指向z轴的一个均匀场

$$\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{z}}B. \qquad (12.67)$$

(12.65)式中的两项彼此对易，其中的第一项就是一个粒子在磁场中的非相对论哈密顿量的形式（不是哈密顿量的平方）。它的本征值有着著名的兰道谱[10]：

$$\text{兰道本征值} = p_z^2 + 2eB\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$\text{简并度} = \Omega^{2/3}eB/2\pi, \qquad (12.68)$$

式中，p_z是沿磁场方向的动量，而 Ω 是总的空间体积。量子数 n 的每个值都对应于该粒子的一条圆形经典轨道。简并度是由于轨道中心可以位于垂直于 $\boldsymbol{B}$的平面上的任何地方而产生的。单粒子的能量用 p_z、n、S_z 三个量子数标志

$$E(p_z,\ n,\ S_z)=\left[p_z^2+2eB\left(n+\frac{1}{2}-S_z\right)\right]^{1/2}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\qquad S_z=\pm S. \tag{12.69}$$

单位体积的真空能量为

$$\mathscr{E}_{\text{vac}}=(-1)^{2S}\frac{eB}{2\pi}\int\frac{dp_z}{2\pi}\sum_n\sum_{S_I}\left[p_z^2+2eB\left(n+\frac{1}{2}-S_z\right)\right]^{1/2}, \tag{12.70}$$

式中的因子 $(-1)^{2S}$是考虑到自旋与统计之间的关系而引入的[注e]。磁化率 χ 由下式定义

$$\mathscr{E}_{\text{vac}}=-\frac{1}{2}\chi B^2. \tag{12.71}$$

对于 $S>\frac{1}{2}$的情形，(12.69) 式有复的本征值，相应于尼尔森和奥勒森 (Olesen) [11]所研究的不稳定模式。然而，它们对 χ 没有贡献。

通过给 p_z 和 n 的值加上下列限制

$$E(p_z,\ n,\ S_z)<\Lambda, \tag{12.72}$$

我们可以把发散的表达式 (12.70) 截断。在 $\Lambda\to\infty$ 和 $B\to 0$ 的极限下，把 (12.70) 式对 n 求和中的那些较高阶的项用欧拉公式[12]近似地表达

$$\sum_{n=N}^{K}f\left(n+\frac{1}{2}\right)\cong\int_N^K dxf(x)-\frac{1}{24}\Big[f'(K)-f'(N)\Big], \tag{12.73}$$

[注e] 我们取真空能量为体系的零点能。对于一个单玻色子场，这个能量是所有单粒子能量和的一半。对于一个带电的玻色子场，由于它有两个分量，$\frac{1}{2}$因子被消掉了。对于一个费米子场，真空能量是所有负的单粒子能量之和。

则可以把（12.70）式计算出来，式中的 N 应取得足够大以使这个近似是正确的．该式的精确值并不重要；$n<N$ 的那些项只影响到 Λ 的标度．在文献[7]中详细地做了这个计算，这里就不再重复了．我们仅仅指出，对于 n 求和取连续的极限不会对 χ 做出贡献，只有（12.73）式中的第二项才与 χ 有关系．这与经典体系不显示抗磁性[10]有联系．对于真空的能量密度，结果为

$$\mathscr{E}_{\text{vac}} = -(-1)^{2S}\frac{e^2B^2}{16\pi^2}\left[(2S)^2-\frac{1}{3}\right]\ln\frac{\Lambda^2}{CeB}+\text{常数}，\tag{12.74}$$

式中的 C 是某个对我们的目的并不重要的数．由此式可得

$$\chi=(-1)^{2S}\frac{e^2}{8\pi^2}\left[(2S)^2-\frac{1}{3}\right]\ln\frac{\Lambda^2}{CeB},\tag{12.75}$$

它就是在弱的静态外磁场（$k^2=CeB\to 0$）中真空的磁化率．

3．尼尔森-休斯公式

比较（12.75）式与（12.64）式，我们发现

$$\beta_0=-\frac{(-1)^{2S}}{2\pi}\left[(2S)^2-\frac{1}{3}\right].\tag{12.76}$$

对于任意自旋 S 的零质量荷电粒子场（它的 $g-2=0$），这个结果都是正确的。它也被休斯（Hughes）[13]从颇不相同的观点推导出来了．我们叫它“尼尔森-休斯公式”．

当把（12.76）式用到（12.49）式和（12.48）式中时，我们就得到跑动耦合常数 $\alpha=\dfrac{e^2}{4\pi}$ 的变化率，式中的 e 是与推导磁化率中用到的“电磁”场有关的电荷．如果把跑动耦合常数定义为 $\alpha=g^2/4\pi$，则上面提到的电荷就是 $e=Qg$，那时（12.76）式就应当乘上 Q^2．

（12.76）式中的 $(2S)^2$ 项表示由于外磁场的增强所引起的效应，这种增强是因为自旋沿磁场方向排列起来造成的；而 $-\dfrac{1}{3}$

项代表轨道运动的影响，它产生一个磁场，倾向于抵消外加的场。这两项分别与固体物理中泡利的顺磁性与兰道的抗磁性相类似，在那里二者的磁化率也有如下的比率$\left(\text{对 } S=\frac{1}{2}\right)$[10]

$$\chi_{\text{兰道}}/\chi_{\text{泡利}}=-\frac{1}{3}. \tag{12.77}$$

在现在的情形下，一个附加的效应出现了，它是由于费米子具有负的真空能量而引起的，因子$(-1)^{2S}$正代表了这一点。于是，假如不是必须引入"空穴"理论的话，量子电动力学本来也会有渐近自由的。

为了把尼尔森-休斯公式应用于 QCD，我们把来自于不同色和味的夸克以及胶子 X、Y、Z 的贡献加在一起。把与中性胶子场（A或B）相联系的场取作外磁场，借助于表 12.1，我们得到

$$(\beta_0)_{\text{夸克}}=N_f/6\pi,$$
$$(\beta_0)_{\text{胶子}}=-11/4\pi. \tag{12.78}$$

所以

$$\beta_0=-\frac{1}{6\pi}\left(\frac{33}{2}-N_f\right), \tag{12.79}$$

它正和（12.53）式的结果相同。

12.4 π 介子作为戈德斯通玻色子

1. 低能范围

与渐近自由相联系的标度$\bar{\Lambda}\sim 0.5\,\text{GeV}$，定出了一个大动量（或短距离）区

$$\ln(k^2/\bar{\Lambda}^2)\gg 1,$$

在这个区域内，可以把夸克和胶子作为微弱地相互作用的粒子而用微扰 QCD 处理。这个标度的另一端（$k^2/\bar{\Lambda}^2\leqslant 1$）是低能强

子物理学，在这个区域内，相互作用的单元不是一个一个的夸克和胶子，而是强子。迄今，我们还不会求解这个范围的QCD。然而，早在QCD创立之前，从大量可以利用的实验资料出发，就已经发展了一些富有成果的思想。当把它们转化为QCD所期望的一些性质时，有些思想就变成具体而又极容易理解的陈述。它们还为QCD的数学结构提供了线索。我们就要提及的是所谓的"流代数"[14] (current algebra)。在本节内，我们把其中称为"PCAC"（部分守恒轴矢量流假说）的那部分移植到QCD中来。

2. 手征对称性：一个理想化的极限

QCD拉格朗日密度中的质量矩阵是一个未知其来源的唯象的量。它和第六章讨论的温伯格-萨拉姆模型中的夸克质量矩阵是一样的。如果我们用温伯格一萨拉姆模型描写电弱相互作用，那么可重整性要求 M 起源于希格斯场的真空期待值，但是它还包含有一些任意常数，因而仍然是一个唯象的量。无论其来源如何，通过味混合变换[注f]，总可以用（6.71）式所示的方法把 M 变成对角形式。于是，拉格朗日密度中的质量项可以写成

$$\mathscr{L}_{\text{mass}} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{f=1}^{6} m_f \bar{q}^{fi} q^{f}. \tag{12.80}$$

如果正象我们将要假设的那样，QCD导致夸克禁闭，则质量参数 m_f 就不是可观测量。然而，正如以后我们将看到的，它们可以通过"流代数"方法用可观测的强子质量来确定，我们称之为"流"(current) 夸克质量，以资区别于"组分"(constituent) 夸克质量，后者是在强子结构的唯象夸克模型中所采用的参数。

强相互作用的近似的么正对称性，暗示 $m_u \cong m_d \cong m_s$。由

[注f]我们暂时忽略与12.6节讨论的CP破坏有关的复杂性。

于同位旋守恒是比整个味 $SU(3)$ 要好得多的对称性，所以 $m_u \cong m_d$ 的关系与 $m_d \cong m_s$ 相比，应当在更高的精度上成立。c，b，t 的质量参数均应比 u、d、s 大得多，因为在强子谱中我们看不到任何表明味 $SU(4)$ 或更高的对称性存在的迹象。

如果设 $m_u = m_d$，则同位旋将严格守恒，在这个极限下，n 和 p 将有相同的质量，π^-、π^+和π^0 的质量也将相同。但是，这解释不了为什么 π 介子的质量这么小（$m_\pi/m_n = 0.14$），它使 π 介子在强子中间非常特殊。为了理解这个问题，南部[15]和周光召[16]曾建议，存在着一种极限，在这种极限下，π 介子是一个与对称性自发破缺相联系的零质量戈德斯通玻色子。这种极限当然是一种理想化的理论产物。作为一个例子，南部和琼奈-拉希纽（Jona-Lasinio）[17]给出了一个不可重整的模型，在这个模型中，基础场是零质量的核子场，因而具有手征对称性，它的自发破缺产生核子质量以及一个可以看作是 π 介子的零质量戈德斯通玻色子。

为了把这些想法移植到 QCD 中，我们考虑相应于

$$m_u = m_d = 0 \tag{12.81}$$

的理想化极限。在这个极限下，显示出手征对称性的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_{手征} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + \bar{\psi} i \not{D} \psi, \tag{12.82}$$

式中

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \tag{12.83}$$

夸克的色指标已经被略去了。

完整的 QCD 拉格朗日密度可以写成以下形式

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{手征} - (m_u \bar{u} u + m_d \bar{d} d) + \mathscr{L}_{scbt}, \tag{12.84}$$

式中 $\mathscr{L}_{scbt}$ 包括那些只与夸克 s、c、b、t 有关的项。我们将把 $\mathscr{L}_{手征}$ 看作是“无微扰”的拉格朗日密度。手征对称性的理想化

极限相应于无微扰问题。

以后我们将证明，m_u 和 m_d 与核子质量相比事实上是很小的。因此，$\mathscr{L}_{手征}$ 本身应能相当好地描写“普通”强子物理学，在那里，奇异性和更高的味不起直接作用。这个假设暗示，强子的质量产生于维数蜕变，因为在 $\mathscr{L}_{手征}$ 中没有任何内在的质量参数。

由 $\mathscr{L}_{手征}$ 所描写的“无微扰”体系，在下列整体对称群不是不变的：

$$
\begin{aligned}
&[SU(2)]_V: \psi \to e^{-i\tau\cdot\omega/2}\psi, \\
&[U(1)]_V: \psi \to e^{-i\alpha}\psi, \\
&[SU(2)]_A: \psi \to e^{-i\tau\cdot\theta/2}\gamma_5\psi, \\
&[U(1)]_A: \psi \to e^{-i\beta}\gamma_5\psi,
\end{aligned}
\tag{12.85}
$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{\theta}$、α、β 都是任意的实常数。下标 V 和 A 分别代表“矢量”和“轴矢量”。与它们相联系的诺特流分别为

$$
\begin{aligned}
&J_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\tau_k\psi \quad (k=1,2,3) \quad (\text{同位旋流}), \\
&j_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (\text{重子流}), \\
&J_{5\mu}^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_k\psi \quad (k=1,2,3), \\
&j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi.
\end{aligned}
\tag{12.86}
$$

重子流即使在由 $\mathscr{L}$ 所定义的微扰体系中也是守恒的。只要 $m_u = m_d$，同位旋流就是守恒的。轴矢量流仅在手征对称性极限下才是守恒的，更不用说以后要讨论的可能是反常了。

这些对称性在自然界中是怎样显示出来的呢？首先，$[SU(2)]_V$ 和 $[U(1)]_V$ 分别直接地表现为同位旋守恒和重子数守恒。特别是，强子都分成一些可以很容易识别的同位旋多重态。

另一方面，要直接表现出 $[SU(2)]_A$，就需要每一个同位旋多重态都伴随有质量相同而宇称相反的镜象多重态。强子谱中找不到这种多重态的任何迹象。例如，即使是核子同位旋二重态的近似的镜象也不存在。如果假设手征对称性极限是真实世界的很好的近似，那么我们就必须得出这样的结论：$[SU(2)]_A$ 是自发

破缺的。这就要求有一个 I = 1 的赝标戈德斯通玻色子，我们认为它就是“无微扰”的 π 介子。那时，物理的 π 介子相应于这个戈德斯通玻色子的微扰态，它的质量来自 m_u 和 m_d。

$[U(1)]_A$ 如何显示的问题，成了一个谜，以后将单独讨论。

$[SU(2)]_A$ 以戈德斯通模式表现出来，其动力学原因是什么呢？我们还没有答案。在南部和琼奈-拉希纽[17]的不可重整的前QCD模型（Pre-QCD）中，对称性自发破缺的原因是强加于该模型中的核子-核子直接的吸引力，它类似于超导理论中[注g]起形成库柏对作用的电子-电子之间等效的吸引力。在QCD中可重整性不允许有直接的夸克-夸克相互作用，但可以产生一种等效相互作用，恰如超导性中由更基本的电子-声子相互作用引起等效的电子-电子吸引力一样。曾经有人提出[18]，瞬子在这样一种等效夸克-夸克相互作用中起一定的作用。

无论动力学机制如何，手征对称性的自发破缺将导致非零的真空期待值 $\langle\bar{u}u\rangle$ 和 $\langle\bar{d}d\rangle$，它们提供了手征极限下的强子质量标度（维数蜕化）。它还可能赋予 u 和 d 以某种等效质量——所谓的“组分”夸克质量。于是我们看到，手征对称性破缺问题不可能脱离夸克禁闭问题。

. PCAC（部分守恒轴矢量流假设）

设 π 介子态用 $|\pi^j\rangle$ 代表，其中 $j=1,2,3$ 是同位旋指标。算符 $J^k_{5\mu}$ 可以湮灭与 π 介子有相同量子数的态，因此它把 π 介子态与真空联系起来。根据洛仑兹不变性和同位旋守恒，我们可以写出

$$\langle 0|J^k_{5\mu}(x)|\pi^j\rangle = i\delta_{jk}f_\pi p_\mu e^{-ip\cdot x}, \qquad (12.87)$$

其中 p_μ 是四维动量，f_π 是一个常数。立即可以求得

[注g]在超导理论中，通过希格斯机制，戈德斯通玻色子被电磁场“吃掉”，光子在超导体中变成有质量的(麦斯纳(Meissner)效应)。

$$\langle 0 |\partial^\mu J^k_{5\mu}(x)| \pi^j\rangle = \delta_{jk} f_\pi m_\pi^2 e^{-ip\cdot x}. \quad (12.88)$$

这是与手征极限下 π 介子是一个戈德斯通玻色子的观点一致的，因为 $\partial^\mu J^k_{5\mu}=0$ 暗示着 $m_\pi=0$。

定义
$$\phi^k_\pi(x) \equiv \frac{1}{m_\pi^2 f_\pi}\partial^\mu J^k_{5\mu}(x). \quad (12.89)$$

则

$$\langle 0| \phi^k_\pi(x)| \pi^j\rangle = \delta_{jk} e^{-ip\cdot x}. \quad (12.90)$$

于是，$\phi^k_\pi(x)$ 可以当作 π 介子场算符来使用。它由夸克算符组成，反映了 π 介子的束缚态性质。"PCAC"的内容就是对于在手征极限下（$m_\pi\to 0$）使用 $\phi^k_\pi(x)$ 的一条规则。

考虑反应 $a\to b+\pi^k$。利用约化公式[19]

$$\langle \pi^k, b^{出}| a^{入}\rangle = i\int d^4x e^{ip\cdot x}(\Box^2+m_\pi^2)\langle b| \phi^k_\pi(x)| a\rangle, \quad (12.91)$$

式中 p 是 π 介子的四维动量，分离出系数 $i(2\pi)^4\delta^4(p+p_b-p_a)$ 之后，我们可以求得跃迁振幅

$$\text{振幅}(a\to b+\pi^k) = (m_\pi^2-p^2)\langle a|\phi^k_\pi(0)|b\rangle. \quad (12.92)$$

"PCAC"的实现由定义质壳外（off-mass-shell）振幅为

$$T^k_{ab}(p^2) \equiv \frac{m_\pi^2-p^2}{f_\pi p^2}\langle a|\partial^\mu J^k_{5\mu}(0)|b\rangle \quad (12.93)$$

组成。先让 $m_\pi\to 0$，求得手征极限下质壳外振幅，然后再取质壳极限 $p^2\to 0$，就得到了手征极限。于是

$$T^k_{ab}(p^2) \xrightarrow[\text{手征极限}]{} -\frac{1}{f_\pi}\langle a|\partial^\mu J^k_{5\mu}(0)|b\rangle. \quad (12.94)$$

现在来确定常数 f_π。在 QCD 内，（12.86）式中的那些流，没有任何一个是与动力学场耦合的。当我们把体系扩大，包括进电弱相互作用时，J^k_μ 和 $J^k_{5\mu}(k=1,2)$ 就变成了与 $W^k_\mu(k=1,2)$ 耦合的改变电荷的弱流部分。于是，在荷电 π 介子衰变（$\pi\to\mu+\nu'$）矩阵元中包含有（12.87）式的 $k=1,2$ 分量。因此，f_π 可以由荷电 π 介子的寿命确定。不再进行推导，我们只引用其结果[14]

$$
几率(\pi\to\mu+\nu')=\frac{1}{4\pi}f_\pi^2(G\cos\theta)^2 m_\pi m_\mu^2\left(1-\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2, \quad (12.95)
$$

式中G是费米常数，θ是卡比玻角，m_π和m_μ分别为π介子和μ子的物理质量，利用荷电π介子的寿命值2.6×10^{-8}秒，可求得

$$
f_\pi=93\mathrm{MeV}. \quad (12.96)
$$

它被称为“π介子衰变常数”。

4. $\pi^0\to2\gamma$ 衰变

把（12.94）式应用于π^0介子到两个光子的电磁衰变。π^0算符正比于

$$
J_{5\mu}^3=\bar{u}\gamma_5\gamma_\mu u-\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 d. \quad (12.97)
$$

它有轴矢反常。从（11.36）式我们得到

$$
\partial^\mu J_{5\mu}^3=2m_u(\bar{u}\gamma_5 u)-2m_d(\bar{d}\gamma_5 d)+\frac{\xi\alpha}{2\pi}\widetilde{F}\cdot F, \quad (12.98)
$$

其中

$$
\xi=3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]=1. \quad (12.99)
$$

因子3是夸克的色造成的。在手征极限下，取$m_u=m_d=0$，结果在（12.98）式中只剩下反常项。

设两个终态光子的四维动量和极化矢量分别用k_1，ε_1和k_2，ε_2代表。由（12.94）和（12.98）式知，手征极限下质壳外衰变振幅为

$$
\begin{aligned}
T(\omega)&=-\frac{1}{f_\pi}\frac{\alpha}{2\pi}\langle k_1\varepsilon_1,k_2\varepsilon_2|\widetilde{F}\cdot F|0\rangle\\
&=-\frac{2\alpha}{\pi f_\pi}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_1^\mu\varepsilon_2^\nu k_1^\alpha k_2^\beta \quad (12.100)\\
&=-\frac{4\alpha}{\pi f_\pi}\omega^2|\boldsymbol{\varepsilon}_1\times\boldsymbol{\varepsilon}_2|,
\end{aligned}
$$

式中的三维矢量都是质心系中的矢量，其中

$$
k_1=(\omega,\boldsymbol{k}),\quad k_2=(\omega,-\boldsymbol{k}),\quad |\boldsymbol{k}|=\omega,
$$

$$\varepsilon_1=(0,\boldsymbol{\varepsilon}),\ \varepsilon_2=(0,-\boldsymbol{\varepsilon}) \ . \tag{12.101}$$

利用（12.100）式，经过一些标准的计算后得到

$$\text{几率}(\pi^0\to 2\gamma)=\frac{\alpha^2}{64\pi^3}\left(\frac{m_\pi}{f_\pi}\right)^2 m_\pi. \tag{12,102}$$

它给出 π^0 的寿命为

$$\tau=(8.5\text{eV})^{-1}, \tag{12.103}$$

它与实验值[20]是一致的

$$\begin{aligned}\tau_{\text{实验}}&=[(7.95\pm0.55)\text{eV}]^{-1} \\ &=0.828\times10^{-16}\pm0.057\text{s}.\end{aligned} \tag{12.104}$$

假如我们不知道反常这回事，我们本来会得到手征极限下这个衰变几率为零的结果，那时我们就会对于“PCAC”在这里失败而在其它应用中却一直很成功感到困惑不解。历史上的确产生过这种迷惑，而且它也正是导致发现轴矢量反常的主要动机。

如果我们不考虑色，所算得的衰变几率就要差一个3的因子，因而太小了。然而，单靠这一点还不能成为色的证据，因为用核子而不是夸克构造这个流，也能得到正确的答案。

我们可以从另一种观点来看振幅（12.100），即它是对于轴矢量顶点三角图的四维散度。在手征极限下 $m_u=m_d=0$，按照特霍夫特原理（见11.7节），如果夸克是禁闭的，那么 u 和 d 夸克圈引起的反常必须由一些零质量的束缚态重新产生出来。我们曾假设极限下的手征对称性是自发破缺的，因此这种零质量的束缚态一定是戈德斯通玻色子 π^0，它与双光子的耦合完全由反常确定。更高的味的夸克对三角图也有贡献，不过对于 π^0 必然重新产生的反常，它们没有贡献，因为在我们所考虑的手征极限下，它们保持有质量。而这恰恰是关于 π 介子主要是由 $\bar{u}u$ 和 $\bar{d}d$ 而极少可能由 $\bar{s}s$、$\bar{c}c$ 等所组成的一种形式上的表达方法。

5. 扩充到 π 介子八重态

由于存在着强有力的证据，证明在强子物理学中有近似的么

正对称性，我们或许可以接受扩充的手征对称性极限的想法，它相应于

$$m_u = m_d = m_s = 0. \tag{12.105}$$

根据与前述相同的理由，我们应能断定，这种扩充的手征对称性是自发破缺的，并且表现在存在一个戈德斯通玻色子，它可以看作是 π 介子八重态。为了考虑这个极限，我们所必须做的就是，通过重新定义

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \tag{12.106}$$

并且用盖尔曼矩阵 λ_a $(a=1,\cdots,8)$来代替(12.85)式和 (12.86)式中的泡利矩阵 τ_k，而把 (12.82) 式和 (12.83) 式扩大。那时，我们就得到了一个具有整体对称群

$$[SU(3)]_V \times [SU(3)]_A \times [U(1)]_V \times [U(1)]_A \tag{12.107}$$

的“无微扰”体系，其中 $[SU(3)]_V$ 直接以“八重态方法”(eightfold way) 实现，$[SU(3)]_A$ 以戈德斯通模式实现。

在 π 介子八重态以及所有其它的味 $SU(3)$ 多重态中，质量的分裂都来自微扰拉格朗日密度

$$-(m_u\bar{u}u + m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s), \tag{12.108}$$

它的效应通常用“手征微扰论”[21](chiral perturbation theory)处理，这是一种把“流代数”方法与“扩充PCAC”结合起来的理论。利用这些技巧，可以把夸克质量比和包含有 π 介子和 K 介子质量的一些关系联系起来。我们引用温伯格的结果[22]

$$\frac{m_d}{m_u} \cong \frac{m^2(K^0) - m^2(K^+) + m^2(\pi^+)}{2m^2(\pi^0) + m^2(K^+) - m^2(K^0) - m^2(\pi^+)} = 1.80, \tag{12.109}$$

$$\frac{m_s}{m_d} \cong \frac{m^2(K^0) + m^2(K^+) - m^2(\pi^+)}{m^2(K^0) - m^2(K^+) + m^2(\pi^+)} = 20.1,$$

利用观察到的味 $SU(3)$ 多重态中的质量分裂作为估算 m_s 的指导，温伯格给出[23]

$$\begin{aligned} m_s &= 150\text{MeV}, \\ m_d &= 7.5\text{MeV}, \\ m_u &= 4.2\text{MeV}. \end{aligned} \tag{12.110}$$

12.5 U(1)疑难

假如 $[U(1)]_A$ 对称性直接显示出来的话，则手征极限下，所有零质量的强子都会有一个零质量但相反宇称的伙伴。在真实的世界中，我们就会预期存在一个类似于 π 介子的标量粒子，它的质量与 π 介子差不多是完全一样的。由于这样的粒子并没有出现，所以我们假设这个对称性是自发破缺的。但那时就应当有一个 $I=0$ 的赝标戈德斯通玻色子，它的微扰态应当有着与 π 介子差不多相同的质量。温伯格[24]利用手征微扰论估计这个质量值要小于 $\sqrt{3}\,m_\pi$。在已知的强子中间，具有正确的量子数的仅有的候选者是 η (549) 和 η' (985)。两者都超过了温伯格给出的上限.此外，η (549) 已经被 π 介子八重态要去了。$U(1)$ 疑难就是：**额外的这个戈德斯通玻色子在哪里？**

特霍夫特通过证明这样的结论而解除了这个疑难：即由于瞬子效应，这个预期的戈德斯通玻色子不是一个物理粒子。我们不再对它做详细的分析，而只提一提有关的几点。

由于 QCD 的轴矢反常[注h]，使得流 j_5^μ 不守恒

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{N_f g_0^2}{16\pi^2}\tilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F} \tag{12.111}$$

[注h]参看 11.4 节末的评述.这个反常的形式是阿贝尔情况下反常的明显推广.系数是把阿贝尔情况下值乘上 $N_f/2$，这个因子与前面脚注中讨论的GL函数出现的因子相同。

式中 N_f 是手征极限下所考虑的夸克味的数目（$N_f=2$ 或 3），并且我们用了简写 $\widetilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F}=\widetilde{\mathscr{F}}^{\mu\nu}_a\mathscr{F}_{a\mu\nu}$。我们知道，$\widetilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F}$ 是一个全四度散度[见(5.6)式]

$$\widetilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F}=\partial_\mu X^\mu \tag{12.112}$$

它对整个时空的积分正比于拓扑荷。我们可以定义一个守恒的但非规范不变的流

$$J_5^\mu\equiv j_5^\mu-\frac{N_f g_0^2}{16\pi^2}X^\mu, \tag{12.113}$$

它是（11.39）式对非阿贝尔群的推广。$[U(1)]_A$ 对称群的生成元可以取为

$$Q_5\equiv\int d^3xJ_5^0=\int d^3x\left[\psi^+\gamma_5\psi-\frac{N_f g_0^2}{16\pi^2}X^0.\right] \tag{12.114}$$

在阿贝尔情形下，由于不存在拓扑荷，Q_5 是规范不变的。在这里，这一点不再成立，因而 Q_5 不是一个物理量。事实上，由于存在瞬子，Q_5 连守恒量都不是。为了看到这一点，把方程式 $\partial^\mu J_5^\mu$ 对四维欧氏空间求积分，结果可以表示为下列形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{dQ}{dt}=2N_f q[G], \tag{12.115}$$

式中

$$q[G]=\frac{g_0^2}{32\pi^2}\int d^4x\widetilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F} \tag{12.116}$$

是拓扑荷，它是规范场 G_a^μ 的一个泛函。对于相应于一个瞬子的 Q_a^μ，$q[G]=1$。所以，在这种情形下，在欧氏时间内，Q_5 的边界值相差

$$\Delta Q_5=2N_f q[G]. \tag{12.117}$$

这个差可能是由于在相差单位拓扑荷的两个规范场之间（在欧氏时间内）插入了一个瞬子的结果（见 8.6 节）。这样，没有任何理由可以期望 $[U(1)]_A$ 具有物理的表现形式。特霍夫特的详细分析阐明了这个可能的戈德斯通玻色子结果会怎样，不过我们不再

详细讨论了.

$U(1)$疑难不是一个数学上的佯谬，而是人们所珍爱的信念受到的一个挫折。特霍夫特的工作的确把原始形式的疑难解除了，然而却产生了新的问题。例如，“瞬子物理学”把我们关于低能物理学的一些传统看法，特别是关于$[SU(2)]_A$自发破缺的思想改变了吗？深入讨论这些问题会使我们卷入一场纠缠不清的大辩论中。下一节，我们只讨论瞬子物理学中一个相对来讲了解得比较清楚的方面——QCD 中 θ 世界的情况。

12.6 QCD中的θ世界

1. 欧氏作用量

我们还记得，规范变换有“大”和“小”之分(见8.6节)．若在作用量中加上一个正比于拓扑荷的项，我们就可以使真空态在所有的规范变换下都是不变的，其中包括那些“大的”规范变换（见（8.140）式）．不管 c、b、t 那些重夸克，我们来考虑闵氏作用量

$$S_\theta=\int d^4x\left[-\frac{1}{4}\mathscr{F}^2+\overline{\psi}\,(i\not{D}-M)\;\psi\right]-\theta q[G],\quad(12.118)$$

其中ψ 由（12.106）式给出，而M是以后要详细讨论的质量矩阵。与拓扑荷 $q[G]$相乘的参数 θ 是一个未知的常数。在没有夸克的QCD 中，它标志着不同的 θ 世界，它们在物理上有明显的区别。我们将看到，当把夸克引入到这个理论中时，θ 的意义，不管是数学上还是物理上，都发生了变化。

我们将在四维欧氏空间中讨论。为了从闵氏空间中延拓到欧氏空间，只要把表 12.2的左边一列中的项换成右边一列中相应的项即可。要注意，欧氏空间的上、下指标不必区分．欧氏空间中的狄拉克矩阵都是厄米的，而 γ_5 在两个空间中用同样的矩阵表

示。从现在起，我们把代表欧氏量的下标 E 省掉。欧氏作用量写成

$$S_\theta=\int d^4x\left[\frac{1}{4}\mathscr{F}^2+\overline{\psi}(\not{D}+M)\psi\right]+i\theta q[G]. \quad (12.119)$$

可以用来求得夸克的欧氏格林函数的“配分函数”由

$$Z_\theta[\eta,\eta']=\mathscr{N}\int(DG)(D\overline{\psi})(D\psi)\exp[-S_\theta-(\overline{\psi},\eta)$$

$$-(\overline{\eta},\psi)] \quad (12.120)$$

给出，式中 η 和 η' 是反对易 c 数外源，指数中省略了熟知的规范固定项和鬼项。我们用了简写 $(f,g)=\int d^4xf\cdot g$，其中 $f\cdot g$ 是所有的指标（只要有的话）缩并的乘积。

表12.2 从闵氏空间到四维欧氏空间的解析延拓

	闵氏空间	欧氏空间
坐标	x^0 x^k	$-ix_E^4$ $x_E^k(k=1,2,3)$
动量	p^0 p^k	ip_E^4 p_E^k
规范场	G_a^0 G_a^k	$i(G_E)_a^4$ $(G_E)_a^k$
不变量	$\mathscr{F}^2$ $\widetilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F}$	$\mathscr{F}_E^2$ $i\widetilde{\mathscr{F}}_E\cdot\mathscr{F}_E$
拓扑荷	$g[G]$	$g[G_E]$
狄拉克矩阵	γ^0 γ^k $\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}$ $\gamma_5\equiv-i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ $\not{p}\equiv\gamma^\mu p_\mu$	γ_E^4 $-i\gamma_E^k$ $\gamma_E^\mu\gamma_E^\nu+\gamma_E^\nu\gamma_E^\mu=2\delta_{\mu\nu}$ $(\gamma_E)_5\equiv\gamma_E^1\gamma_E^2\gamma_E^3\gamma_E^4$ $i\not{p}_E=i\gamma_E^\mu p_E^\mu$
θ 作用量	S_θ	$i(S_E)_\theta$

2. 轴矢反常和指标定理(index theorem)

在零质量极限下，S_θ 是手征变换下的不变量。由于(12.120)式中的量都是经典量，故可以期望得到经典的结果 $\partial_\mu j_5^\mu=0$，但不知轴矢反常来自何处。富士川 (Fujikawa) [25]证明，它来自费米子测度 (measure)

$$d\mu=(D\overline{\psi})(D\psi) \tag{12.121}$$

的非手征不变性。为了看到这一点，定义一个$\not{D}$的旋量本征函数完备集[注]

$$\begin{gathered}\not{D}\phi_n(x)=E_n\phi_n(x),\\ \int d^4x\phi_n^+(x)\phi_m(x)=\delta_{nm},\\ \sum_n\phi_n(x)\phi_n^+(y)=\delta^4(x-y),\end{gathered} \tag{12.122}$$

由于 $\not{D}$ 依赖于 G_a^μ，故式中的 $\phi_n(x)$ 是 G_a^μ 的一个泛函。我们把每一种味的夸克场 ψ 和 $\overline{\psi}$ 展开如下（为了简便起见，略去了味指标）

$$\begin{gathered}\psi(x)=\sum_n a_n\phi_n(x),\\ \overline{\psi}(x)=\sum_n b_n\phi_n^+(x),\end{gathered} \tag{12.123}$$

式中 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是独立的反对易 c 数的集合。取

$$d\mu=\prod_f\prod_n db_n\,da_n, \tag{12.124}$$

式中 f 代表味。在定域的手征变换之下

$$\begin{gathered}\psi(x)\longrightarrow\psi'(x)=e^{-i\gamma_5\alpha(x)}\psi(x),\\ \overline{\psi}(x)\longrightarrow\overline{\psi'}(x)=\overline{\psi}(x)e^{-i\gamma_5\alpha(x)},\end{gathered} \tag{12.125}$$

而系数 a_n 和 b_n 则线性地变换

[注]我们在一个四维欧氏空间体积 $\Omega=1$ 中使 ϕ_n 归一到一。通过让体积的单元趋于零来取无穷大体积的极限。

$$a_n \longrightarrow a'_n = \sum_m C_{nm} a_m,$$

$$b_n \longrightarrow b'_n = \sum_n C_{nm} b_m, \tag{12.126}$$

式中 C_{nm} 是普通的数

$$C_{nm} = \int d^4 x \phi_n^*(x) e^{-i\gamma_5 \alpha(x)} \phi_m(x). \tag{12.127}$$

由于 γ_5 与$\not{D}$反对易，所以我们可以取 ϕ_n 为有确定手征性的态。对每一个 $E_n \neq 0$，都有两个手征性相反的简并态。在这样一个"手征表象"中 C_{nm} 是对角的，而且我们可以很容易看到

$$\prod_n da'_n = (\det C)^{-1} \prod_n da_n, \tag{12.128}$$

对于无穷小的$\alpha(x)$，我们有

$$(\det C)^{-1} = \prod_n \left[1 - i \int d^4 x \alpha(x) \phi_n^*(x) \gamma_5 \phi_n(x) \right]$$

$$= \exp i \int d^4 x \alpha(x) \sum_n \phi_n^*(x) \gamma_5 \phi_n(x). \tag{12.129}$$

这个结果与表象无关。于是，在无穷小定域手征变换下

$$d\mu \rightarrow d\mu' = e^{i\Delta} d\mu, \tag{12.130}$$

式中

$$\Delta = 2N_f \int d^4 x \alpha(x) \sum_n \phi_n^*(x) \gamma_5 \phi_n(x) , \tag{12.131}$$

其中 N_f 是所考虑的夸克味的数目。这就证明了费米子测度的非不变性。

(12.131) 式中积分内的求和是不够明确的，为此我们把它定义为

$$\sum_n \phi_n^*(x) \gamma_5 \phi_n(x) \equiv \lim_{\Lambda \to \infty} e^{-E_n^2/\Lambda^2} \phi_n^+(x) \gamma_5 \phi_n(x), \tag{12.132}$$

式中 Λ 是能量截断，它不破坏手征对称性。上式右边的计算是直接的但有些冗长。建议读者参看文献 [26]，这里只列出其结果：

$$\sum_n \phi_n^+(x)\gamma_5\phi_n(x) = \frac{g_0^2}{32\pi^2}\tilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F}. \tag{12.133}$$

把它代入（12.131）式，我们得到

$$\Delta = \frac{N_f g_0^2}{16\pi^2}\int d^4x\,\alpha(x)\,\tilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F}. \tag{12.134}$$

在没有外源存在时，Z_θ 应当在定域手征变换下不变，因为 ψ 和 $\bar{\psi}$ 的所有旋量分量都是独立地求积分的。利用（12.134）式，我们看到，在无穷小定域手征变换下，Z_θ的改变为

$$\delta Z_\theta = i\int(DG)\,d\mu\,e^{-S_\theta}\cdot\int d^4x\,\alpha(x)\left[-\partial_\mu j_5^\mu + 2\bar{\psi}M\gamma_5\psi + \frac{N_f g_0^2}{16\pi^2}\tilde{\mathscr{F}}\cdot\mathscr{F}\right]. \tag{12.135}$$

因此，括号中的量必须为零，我们就得到了如（12.111）式所示的轴矢反常。

上述关于轴矢反常的推导并不比第十一章的推导更严格，因为我们没有证明这个结果与截断手续无关。这样一来，我们也就不能对于前面提到的关于反常没有辐射修正的论证（在11.3节给出的）作出改进。

让我们回到（12.133）式，把它的两边都对四维欧氏空间求积分。左边通过截断手续（12.132）而严格定义，只有 $E_n=0$ 的态（称为“零模式”）对它有贡献。对于 $E_n\neq 0$ 的态，两个简并的手征态的贡献彼此抵消。右边给出拓扑荷。因此

$$n_+ + n_- = q, \tag{12.136}$$

式中 $n_\pm$ 分别为存在背景规范场 G_a^μ 的情形下，（一个给定味的）手征性为 ±1 的零模式的数目，而 q 是背景场的拓扑荷。这就是**阿替亚赫-辛格**（Atiyah-Singer）**指标定理**[26]，我们对于它的推导是不完备的证明，但定理本身是严格的。

对于由一个瞬子组成的背景场，$q=1$，因而指标定理告诉我

们 $n_+ - n_- = 1$。这表明，在单瞬子场中对每一种味夸克至少有一种零模式。特霍夫特[27]证明了，在这个瞬子场中恰好存在一个有正手征性的零模式，它的可以归一的波函数为

$$\phi_{0}(x) = (1 + x^2)^{-3/2} u, \qquad (12.137)$$

式中 $x^2 = x^\mu x^\mu$，而 u 是一个常数狄拉克旋量。

3. 手征极限：θ 世界的坍缩（collapse）

手征极限定义为在作用量

$$S_\theta^{(0)} = \frac{1}{4}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) + (\overline{\psi}, \not{D}\psi) + i\,\theta\, q[G] \qquad (12.138)$$

中取 $M = 0$。那时，配分函数为

$$Z_\theta^{(0)} = [\eta, \overline{\eta}] = \mathscr{N}\int (DG)\ \exp\left\{-\frac{1}{4}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) - i\theta\, q\,[G]\right\} \cdot f_0[G, \eta, \overline{\eta}], \qquad (12.139)$$

$$f_0[G, \eta, \overline{\eta}] = \int d\mu\, \exp[-(\overline{\psi}, \not{D}\psi) - (\eta, \overline{\psi}) - (\overline{\eta}, \psi)].$$

通过一个无穷小整体手征变换而使积分变量改变，则得到

$$\int d\mu \exp[-(\overline{\psi}, \not{D}\psi) - (\eta, \overline{\psi}) - (\overline{\eta}, \psi)]$$

$$= \int d\mu' \exp[-(\overline{\psi}', \not{D}\psi') - (\eta, \overline{\psi}') - (\overline{\eta}, \psi')]$$

$$= e^{2i\Delta} \int d\mu\ \exp[-(\overline{\psi}, \not{D}\psi) - (\eta', \overline{\psi}) - (\overline{\eta}', \psi)], \qquad (12.140)$$

式中

$$\eta' = e^{-i\alpha\gamma_5}\eta, \qquad \overline{\eta}' = \overline{\eta}\, e^{-i\alpha\gamma_5}. \qquad (12.141)$$

所以

$$f_0[G, \eta, \overline{\eta}] = e^{2i\Delta} f_0[G, \eta', \overline{\eta}'], \qquad (12.142)$$

根据（12.134）式，上式的 Δ 为

$$\Delta = 2\alpha N_f q[G]. \qquad (12.143)$$

利用上述结果，我们得到

$$\mathbf{Z}_\theta^{(0)}[\eta,\bar{\eta}]=\mathscr{N}\int(DG)\exp\left\{-\frac{1}{4}(\mathscr{F},\mathscr{F})-i(\theta-2\alpha N_f)q[G]\right\}$$

$$\cdot f_0[G,\eta'\ \bar{\eta}']. \qquad (12.144)$$

因此

$$\mathbf{Z}_\theta^{(0)}[\eta,\bar{\eta}]=Z_{\theta-2\alpha N_f}^{(0)}[\eta',\bar{\eta}']. \qquad (12.145)$$

由于手征变换的群的性质，相应于相继的无穷小变换的 α 都是可加的，所以上式对于一个有限的整体手征变换也是正确的。这样一来，通过对费米子外源作一整体手征变换，取 $\alpha=\theta/2N_f$，则我们总可以使 θ 变为零。这样一种手征变换不会改变物理内容，因为所有的格林函数都是在无外源极限下计算的。于是，当这一理论包含有无质量的夸克时，所有的 θ 世界彼此在物理上是等价的。特别是，该理论在 CP 下是不变的，这一点与 $\theta\neq0$ 的无夸克 QCD 截然相反。

在以上的讨论中省略任何一种夸克场对于结论都不会有什么影响，因为它们都是旁观者，不参与手征变换。于是，要使 θ 世界坍缩，从而恢复 CP 不变性，只要有一个零质量的夸克就足够了。

4. 夸克质量矩阵

现在，我们把质量项

$$\mathscr{L}_{\text{mass}}=-\bar{\psi}M\psi \qquad (12.146)$$

考虑进来，配分函数变成

$$Z_\theta[\eta,\bar{\eta};M]=\mathscr{N}\int(DG)\exp\left\{-\frac{1}{4}(\mathscr{F},\mathscr{F})-i\theta q[G]\right\}$$

$$\cdot f_M[G,\eta,\bar{\eta}] \qquad (12.147)$$

$$f_M[G,\eta,\bar{\eta}]=\int d\mu\ \exp[-(\bar{\psi},(\not{D}+M)\psi)-(\eta,\bar{\psi})$$

$$-(\bar{\eta},\psi)],$$

θ 角仍可以通过手征变换（12.141）式而吸收到费米子部分中，不过现在它将在质量矩阵中出现，因而有某种物理后果。现在取代（12.142）式的是

$$f_M[G,\eta,\bar{\eta}] = e^{2i\Delta} f_{M'}[G,\eta',\bar{\eta}'], \qquad (12.148)$$

式中 M' 是变换后的质量矩阵，其定义为

$$M' = Me^{-2i\alpha\gamma_5}. \qquad (12.149)$$

于是

$$Z_\theta[\eta,\bar{\eta};M] = Z_{\theta-2\alpha N_f}[\eta',\bar{\eta}';M']. \qquad (12.150)$$

通过选取$\alpha=\theta/2N_f$，我们得到

$$Z_\theta[\eta,\bar{\eta};M] = Z_0[\eta',\bar{\eta}';M']. \qquad (12.151)$$

由于 η'，$\bar{\eta}'$ 是任意的外源，所以 θ 的物理意义完全表现在 M' 对 θ 的依赖关系中。

为了使质量矩阵参数化，最方便的做法是把 ψ 分成右手分量 R 和左手分量 L。最普遍的质量项可以写成如下形式

$$\mathscr{L}_{\text{mass}} = -\bar{L}\mathscr{M}R - \bar{R}\mathscr{M}^+L, \qquad (12.152)$$

式中$\mathscr{M}$ 是一个任意的 3×3 复矩阵。因此，质量矩阵的形式为

$$M = A + i\gamma_5 B, \qquad (12.153)$$

式中的 A 和 B 是由

$$A = \frac{1}{2}(\mathscr{M}+\mathscr{M}^+), \qquad B = \frac{i}{2}(\mathscr{M}-\mathscr{M}^+) \qquad (12.154)$$

给出的厄米矩阵。显然，变换后的质量矩阵 M' 也有（12.153）的形式

$$M' = A' + i\gamma_5 B', \qquad (12.155)$$

式中 A' 和B' 都是 3×3 厄米矩阵。

无微扰问题的对称群

$$[SU(3)\times U(1)]_V \times [SU(3)\times U(1)]_A$$

等价于 $[SU(3)\times U(1)]_L \times [SU(3)\times U(1)]_R$,

后者对场的作用方式为

$$[SU(3)\times U(1)]_L:\ L\longrightarrow e^{-i\omega_a\lambda_a/2-i\varepsilon}L,$$

$$[SU(3)\times U(1)]_R:\ R\longrightarrow e^{-i\rho_a\lambda_a/2-i\varepsilon}R. \tag{12.159}$$

假如对这些变换不加任何限制，那么通过它们就可以使 M 对角化，对角元都是非负的数。特别是质量矩阵中破坏CP不变性的 $i\gamma_5B$ 项，可以通过变换而去掉。这正是我们在第四章中在温伯格-萨拉姆模型范围内所做过的。现在，我们清楚地认识到还有一些以前忽略的约束，它们来源于

(a)拓扑荷的存在；

(b)关于 $[SU(3)]_A$ 是自发破缺的假设。

拓扑荷的存在导致规范场部分中的 $i\theta q[G]$ 项以及费米子部分的变换（12.148）式。仅当 θ 值连同原始质量矩阵 M 中的参量一起以特殊的方式加以选取时，该理论才可能是CP守恒的。所以，一般来讲，这个理论破坏CP不变性。

被 $[SU(3)]_A$ 的自发破缺所加的约束是由达辛(Dashen)[28]和努衣兹 (Nuyts)[29] 指出的。在手征极限下，真空是无穷多重简并的，它用相角 ξ 标志。$[SU(3)]_A$ 变换使 ξ 改变，因而使一个真空态变成另一个真空态。微扰 $\mathscr{L}_{质量}$ 明显地破坏 $[SU(3)]_A$，并且挑选了一个特殊的 ξ 值。当去掉这个微扰时，真空就保持在由选出的那个 ξ 所标志的态上。如果我们选择了一个真空，它有着错误的 ξ 值，那么 $\mathscr{L}_{质量}$ 就不再能看作是小的微扰，因为它的叠代效果倾向于把真空转动到正确的状态上。这样，为了能够使用手征微扰论，我们必须从一个正确的真空出发，它是从无穷多重简并的真空当中选出的。

可以同一个铁磁体类比。在不存在外场时，磁化可以指向空间的任意方向。一个外磁场，不管它多么弱，仅当它的方向与未加微扰的磁化方向一致时，其效应才可以当作一个小的微扰来处理。

在现在这种情况下，可以把$\mathscr{L}_{质量}$看作小微扰的条件是，它不应该从未微扰的真空产生戈德斯通玻色子：

$$\langle 0 | \mathscr{L}_{mass} | \pi^k \rangle = 0, \tag{12.157}$$

式中π^k ($k=1,\cdots,8$)指的是未微扰的π介子八重态π、η、K的任何一个成员。由于π^k是一个赝标粒子，这个条件意味着只对(12.155)式中的$i\gamma_5 B'$项加上一个约束

$$\langle 0 | i\overline{\psi}\gamma_5 B' \psi | \pi^k \rangle = 0 \quad (k=1,\cdots,8). \tag{12.158}$$

它要求$\overline{\psi} i\gamma_5 B' \psi$是$[SU(3)]_A$的单态，因此$B'$必须正比于$3\times 3$单位矩阵

$$B = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.159}$$

于是

$$\begin{aligned} \overline{\psi} M' \psi &= \overline{\psi}(A' + i\gamma_5\omega)\psi \\ &= \overline{L}(A' + i\omega)R + \overline{R}(A' - i\omega)L. \end{aligned} \tag{12.160}$$

我们不再能随意地作$[SU(3)]_A$变换，但仍能做$[SU(3)]_V$变换，通过这后一种变换，可以把A'化成对角形式，其本征值为$a_f (f=1,2,3)$。于是，流夸克质量为$(a_f^2+\omega^2)^{1/2}$ $(f=1,2,3)$。

为了确定ω值，我们注意到(12.149)的变换，它把θ由规范场部分转移到费米子部分，在M'的左手部分的行列式中产生一个由下式给出的相因子

$$e^{2i\alpha N_f} = e^{i\theta}. \tag{12.161}$$

可能还有一些其它的相因子，来自于原始质量矩阵M中的参量，不过我们将不予以考虑，因为它们仅仅引起θ的移动，反正它们都是任意的。把A'对角化，而且把ω看作是小量，我们得到

$$\begin{aligned} \det(A' - i\omega) &= (m_u - i\omega)(m_d - i\omega)(m_s - i\omega) + O(\omega^2) \\ &= m_u m_d m_s - i\omega(m_u m_d + m_u m_s + m_d m_s) + O(\omega^2). \end{aligned}$$

(12.162)

让上式的相因子与 $e^{i\theta}$ 相等，我们求得

$$\omega=\frac{\theta}{\frac{1}{m_u}+\frac{1}{m_d}+\frac{1}{m_s}}+O(\theta^2). \tag{12.163}$$

因此

$$\mathscr{L}_{mass}=-(m_u\bar{u}u+m_d\bar{d}d+m_s\bar{s}s)+\mathscr{L}_{cp}, \tag{12.164}$$

其中的CP破坏项 $\mathscr{L}_{cp}$ 在 θ 的最低阶由

$$\mathscr{L}_{cp}=i\zeta\theta\,(\bar{u}\gamma_5 u+\bar{d}\gamma_5 d+\bar{s}\gamma_5 s), \tag{12.165}$$

$$\zeta=\frac{m_u m_d m_s}{m_u m_d+m_u m_s+m_d m_s}$$

给出，如果夸克之中有一个质量为零，则正如所料，有 $\mathscr{L}_{cp}=0$。系数 ζ 首先由贝格 (Bég) [30]用前 QCD 语言导出，它现在的这种形式是由巴卢尼 (Baluni) [31]给出的。

5. 强CP破坏

(12.164) 式中的 $\mathscr{L}_{cp}$ 通过强相互作用产生 CP 破坏，它可以用两种方法来避免：

(a) 可以设夸克之一的质量为零，最自然的是取 $m_u=0$。尽管实验上并不能排除这一可能性，但从唯象观点[32]看来，这样的选择非常别扭。

(b) 我们曾经提到过，用原始质量矩阵 M 中的参数能使 θ 值移动。通过由希格斯场构造 M，可以把 θ 从 QCD 中除掉而放到希格斯场部分去，与此同时，也使理论家们感到心满意足[33]。然而，到目前为止，还没有任何迹象表明，这样一种机制在自然界中起作用。

取 (12.165) 式给出的 $\mathscr{L}_{cp}$，通过标准的手征微扰论，能够计算出它的可观察效应，我们只列出一些在手征极限下准确的结果[34]。

$\mathscr{L}_{\theta p}$的效应之一是在等效 π 介子-核子耦合中引入了一个CP破坏项

$$\mathscr{L}_{\pi NN}=g_{\pi NN}(\overline{N}\gamma_5\boldsymbol{\tau}N)\cdot\boldsymbol{\pi}+g'_{\pi NN}(\overline{N}\boldsymbol{\tau}N)\cdot\boldsymbol{\pi},$$

$$g'_{\pi NN}=-\theta\zeta f_\pi^{-1}(m_\Xi-m_N), \qquad (12.166)$$

式中 m_Ξ 和 m_N 分别为 Ξ 和核子的质量. 在数值上

$$|g_{\pi NN}|\cong 13.4, \qquad |g'_{\pi NN}|\cong 0.038\,|\theta|, \qquad (12.167)$$

其中为了计算 ζ, 用到了 (12.109) 式的结果.

利用上述等效的 π 介子-核子耦合, 可以在手征极限下准确地计算中子的电偶极矩 D_n. 其物理上的理由是这样的 (在各种可能性中间): 中子可以变成一个虚质子和一个虚 π 介子. 由于有CP破坏的 π 介子与核子顶点, 所以在这样一种虚态中, 电荷的分离对中子的电偶极矩做出贡献. 在手征极限下 $m_\pi\to 0$, 与其它过程相比, 这个虚态的贡献占优势. 这是因为此时这个虚 π 介子在与虚质子重新结合之前, 传播到远离虚质子的地方, 从而使它们对电偶极矩的贡献达到最大值. 基于这种物理图象计算的结果给出

$$\frac{D_n}{m_N}=\frac{1}{4\pi^2}g_{\pi NN}\,g'_{\pi NN}\ln\frac{m_N}{m_\pi} \qquad (12.168)$$

数值为

$$D_n=5.2\times 10^{-16}\theta\ \text{cm}. \qquad (12.169)$$

与实验的上限

$$|D_n|<10^{-24}\text{cm} \qquad (12.170)$$

相比较, 得到

$$|\theta|<10^{-9}. \qquad (12.171)$$

参考文献

[1] G.'t Hooft, *Nucl. phys.*, B33, 173(1971); B35, 167(1971).

[2] V. Bargman, L. Michel, and V. L. Telegdi, *phys. Rev*,

lett, 2, 435(1959).
[3] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory*, Part 1 (Pergamon, Oxford, England, 1971), P, 127.
[4] D. J. Gross and F. Wilczek, *phys. Rev. lett.*, 30, 1343 (1973); *phys. Rev.*, D8, 3633(1973).
[5] H. D. Politzler, *Phys. Rev. lett.*, 30, 1346(1973).
[6] W. E. Caswell, *Phys. Rev. lett.*, 33, 244(1974); D. R. T. Jones, *Nucl. phys.*, B75, 531(1974).
[7] A. J. Buras, *Rev. Mod. Phys.*, 52, 199(1980).
[8] N.K.Nielsen, *Am. J. Phys*, 49, 1171(1981)
[9] K. Johnson, in *Asymptotic Realms of Physics*. Eds. A. Guth, K.Huang, and R. L. Jaffe(MIT Press, Cambridge, 1983).
[10] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1963), Chap. 11. (11.88)式的右边应乘以因子2.
[11] N. K. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys.*, B144, 376 (1978).
[12] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (National Bureau of standards, washington, 1964), P. 806.
[13] R. J. Hughes, *Phys. Lett.* 976, 246 (1980); *Nucl. Phys.*, B186, 376 (1981).
[14] 参看S. B. Treiman, in S. B. Treiman, R. Jackiw, and D.J.Gross, *lectures in Current Algebra and Its Applications* (Princeton University Press, Princeton 1972); S. L. Adler and R.F.Dashen, *Current Algebras* (Benjamin, New York, 1968).
[15] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.*, 4 380 (1960).
[16] Chou Kuang-chao, *Soviet Phys.* JETP, 12, 492 (1961).
[17] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, 122, 345

(1961) ; 124, 246 (1961) .

[18] R. D. Carlitz. *Phys. Rev.*, **D**17, 3225 (1978) .

[19] K. Huang and H. A. Weldon, *Phys. Rev.*, **D**11, 257 (1975) 证明了这个约化公式对于束缚态算符是正确的。

[20] Particle Data Group, *Rev. Mod. Phys.*, 52 SI (1980) .

[21] H. Pagels, *Phys.* Reports, 16c, 219 (1975) .

[22] S. Weinberg. *in A Festschrift for I. I. Rabi*, Ed. L. Motz (New York Academy of Science, New York, 1977) .

[23] 另一种建议请看T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (Harwood Publishers, Chur, Switzerland, 1981) P. 584.

[24] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D**11, 3583 (1975) .

[25] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.*, 42, 1195 (1979).

[26] M. Atiyah and I. Singer, *Ann. Math.*, 87, 484 (1968)

[27] G. 'tHooft, *Phys. Rev. Lett.* 37, 8 (1976) ; *Phys. Rev.*, **D**14, 3432 (1976). 也可参看 S. Coleman in *The Ways of Subnuclear Physics*, Ed. A. Zichichi (Plenum, New York, 1980).

[28] R. Dashen, *Phys. Rev.* **D3** 1879 (1971) .

[29] J. Nuyts, *Phys. Rev. Lett.*, 26, 1604 (1971) .

[30] M. A. B. Bég, *Phys. Rev.*, **D4**, 3810 (1971) .

[31] V. Baluni, *Phys. Rev.*, **D**19, 2227 (1979) .

[32] P. Langacker and H. Pagels, *Phys. Rev.*, **D**19, 2070 (1979) .

[33] R. D Peccei and H. R Quinn, *Phys. Rev. Lett.*, 38, 1440 (1977); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 40, 223 (1978) ; F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, 40, 279 (1978) .

[34] R. J. Grewther, P. Diveechia, G. Veneziano, and E. Witten, *Phys. Lett.*, 88 B, 123 (1979) .

结 束 语

CODA

There was a lady from Squantum
Who had incredible momentum.
　　She shook off the glue
　　That colored her blue
And got asymptotic freedom.

There's a boson they call Goldstone
That's very hard to disown.
　　You try electrocution,
　　You get a transmutation;
The photon comes off the light-cone.

A theorist shows me how to mix
Technicolor SU(6).
　　Should you find in the stew
　　A funny quark or two
Just sweep them under the Higgs.

A mathematician named Anatole
Stepped on a magnetic monopole.
　　He struggled with the string
　　Dirac had tied to the thing,
And so became one fiber bundle.

And now my dear for change of pace
Take imaginary holidays
    Where the metric is good,
    No ia's intrude,
In the realm of Euclidean 4-space.

这是一篇既幽默又优美的韵语，经考虑再三，还是保持其原文为宜。——译者注

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝夸克、轻子与规范场
作者＝（美）黄克孙
页数＝３５４
ＳＳ号＝４１００７２６０３
出版日期＝１９８８年１０月第１版